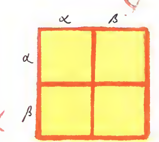
В. АБЧУК

СЕКРЕТ

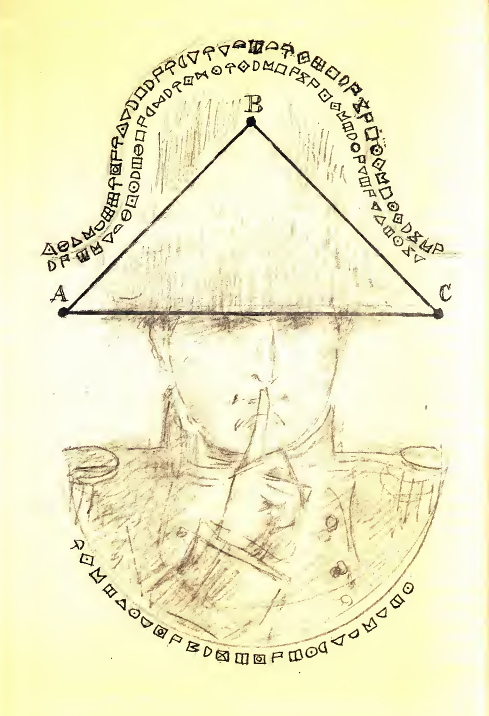


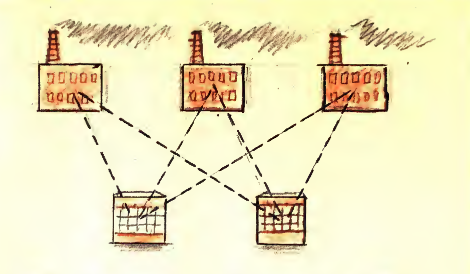
ВЕЛИКИХ

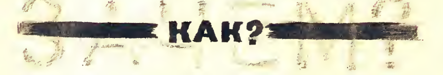


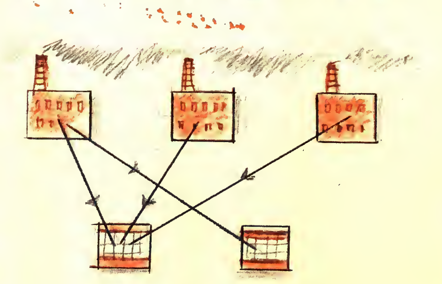
ПОЛКОВОДЦЕВ

Издательство
„Детская литература“


B
A
C




КАК?



В. АБЧУК

СЕКРЕТ ВЕЛИКИХ ПОЛКОВОДЦЕВ



Очерки

ЛЕНИНГРАД
«ДЕТСКАЯ ЛИТЕРАТУРА»
1975

А17
51

А $\frac{70803-196}{М101(03)-75}$ 444—75

ПРЕДИСЛОВИЕ

Однажды, находясь в телевизионной студии, я стал свидетелем удивительной передачи. Она называлась «Математики шутят». Молодой, подтянутый, чем-то напоминающий теннисиста доктор наук доказывал, что старухе из пушкинской сказки о рыбаке и рыбке не хватало... математического образования. По его мысли она должна была прекратить свои запросы, получив титул столбовой дворянки. Когда остальные участники передачи стали возражать, он схватил карандаш и стал чертить график. Он рисовал, что-то подсчитывал, и вдруг всем стало ясно — он прав. Старуха была неграмотна, предел ее возможностей определялся путем простого умножения!

Мы хохотали; уверен, смеялись и телезрители.

К мысли о величии математики люди пришли в глубокой древности.

Хозяйство Египта во времена фараонов целиком зависело от разливов Нила. Мутные воды великой реки, разливаясь, наполняли сложную сеть каналов и канав, уходивших на десятки километров в глубь пустыни. Без воды не было урожая.

Египетские жрецы, уловив связь между временем разлива и положением Солнца среди звезд, путем нехитрых вычислений предсказывали, когда выйдет из берегов река, когда в стране должен начинаться сезон полевых работ.

Простые люди с благоговением наблюдали за таинством. Предсказания всегда сбывались.

Подлинным триумфом вычислений было открытие в XIX веке восьмой планеты Солнечной системы.

Долгое время люди знали только шесть планет, которые можно наблюдать невооруженным глазом или с помощью простой оптики: Меркурий, Венеру, Землю, Марс, Юпитер, Сатурн. Затем к ним добавился Уран. И вот астроном Леверье, изучая движение Урана, обнаружил, что орбита его искривлена. А что, если причиной искривления является притяжение со стороны еще одной планеты, расположенной за Ураном?

Леверье засел за вычисления. Кончиком пера он «извлек из чернильницы» эту таинственную незнакомку, определил ее массу и путь движения. О своем открытии ученый оповестил весь мир. Десятки сильных телескопов были направлены в то место, где, по его расчетам, должна находиться планета. И действительно, в точке, предсказанной Леверье, засветился крошечный шарик! Восьмую планету назвали Плутоном.

В наше время к математике за советом обращаются все.

Сколько рыбы можно отловить в будущем году в Каспийском море? Когда-то подобные вопросы задавали одним ихтиологам. Сейчас рядом со специалистом по осетрам и белугам за стол садится математик. Только их совместный ответ станет руководством для рыбаков.

Что будет через много веков с Африкой и Аравийским полуостровом? Геологи с помощью математиков представили расчеты: Африканский материк и Аравийский полуостров «разъедутся» в разные стороны, Красное море увеличится в размерах, и со временем на его месте будет новый океан.

Перед нами книга с интригующим названием «Секрет великих полководцев». Это неожиданная книга. На уроках математики школьники удивляются редко. Тут можно удивляться на каждой странице. Книга написана занимательно, но притом, это серьезная книга. В ней излагаются вопросы, которые только в последнее тридцатилетие вошли в круг общего знания.

Математика необъятна.

Эта книга — о малой ее части. О том, как следует, опираясь на вычисления, принимать важные решения.

Бессонную ночь провел Наполеон перед битвой под Ватерлоо. Надо было продумать, когда и в какой момент должны появиться на поле боя части, совершающие обходной маневр.

К тому, чтобы переплыть Атлантический океан на резиновой лодке, Ален Бомбар готовился год. Он старался предусмотреть каждую мелочь. Он считал: хватит ли организму белков и углеводов, если питаться все три месяца одним планктоном и сырой рыбой? В какое время года плыть? Каким маршрутом? Он искал наилучшие решения.

Ох, как трудно порой даются они!

Наполеон битву проиграл.

Бомбар едва не погиб от истощения уже в самом конце плавания.

И наконец, разве не опрометчиво поступила пушкинская старуха, когда требовала у золотой рыбки все новых и новых подарков?

От пятилетнего плана до шуточного разбора дуэли Онегина с Ленским — все можно встретить в этой книге. Читая ее, сразу видишь: писал человек, знающий свое дело. И к тому же — веселый. Этот тоже смог бы проверить алгеброй гармонию пушкинской сказки.

«Секрет великих полководцев» должны прочитать все школьники. Те, кто собираются стать рабочими, офицерами, хозяйственниками, учеными. Умение строго научно принимать решения необходимо и для того, чтобы кроить металл, и для того, чтобы составлять торговые планы, подсчитывать оленей в тундре, командовать на мостике военного корабля.

С. Сахарнов.

НАЧАЛО,

в котором автор вступает в беседу с читателем и задает несколько вопросов, которые пока остаются без ответа

Многие дети и даже отдельные взрослые мечтают стать великими полководцами. Однако, как показывает опыт, это удается далеко не каждому. Очень уж непросто — побеждать. И все же есть примеры...

Александр Васильевич Суворов провел шестьдесят сражений и одержал шестьдесят побед. Но дело не только в этих удивительных цифрах. Непостижимо другое: только в трех сражениях из шестидесяти Суворов имел численное превосходство над противником; в пятидесяти семи он победил врага, во много раз превосходящего его по силе. И как победил! В сражении при Рымнике против 25 000 суворовцев стояла стотысячная турецкая армия. Потери войск Суворова составили 1000 человек, потери турок только убитыми — 10 000, а всего турки потеряли около 85 000 человек.

Есть немало и других имен великих полководцев, которые, подобно Суворову, умели побеждать сильнейшего противника. Знает история также и полководцев-неудачников, которых били, несмотря на то, что они имели предостаточно сил для достижения победы.

Тут есть над чем призадуматься. В чем же секрет успеха великих полководцев?

Огромное значение, конечно, имеет высокий моральный дух воинов, сознание правоты дела, за которое они сражаются, патриотизм, отвага, мужество. Но не только это.

Далеко не последнюю роль играет умение полководца ориентироваться в сложной обстановке и принимать быстрые и правильные решения.

Великие полководцы всех времен отличались от своих заурядных коллег тем, что умели расчетливо, быстро и правильно действовать.

Переход Суворова через Альпы, решение Фрунзе прорваться в Крым через Сиваш — это и есть примеры расчетливых и умелых действий.

Умение быстро ориентироваться в сложных условиях, принимать правильные решения и побеждать нужно не только военному человеку. Разве не говорят о враче, что он ведет сражение за жизнь больного? Агроном руководит битвой за урожай, рабочий и инженер воюют с браком, ученые штурмуют бастионы природы... Все они — полководцы «великой армии труда». И каждый из них борется до победы.

Правда, поле битвы и оружие у них разное: рабочий воюет у станка, агроном — в поле, ученый — в лаборатории. Для этого прежде всего каждый должен знать свое дело. Но есть в их усилиях и нечто общее: всем им приходится выбирать наилучший способ действий из всех возможных. Агроному приходится решать, когда лучше всего убирать урожай; врачу — стоит ли идти на риск хирургической операции; рабочему — как изготовить побольше деталей отличного качества.

Принимать решения людям приходится не только на работе. Повседневно, буквально на каждом шагу мы решаем, как лучше поступить, какой избрать образ действий.

Вот мы собрались выйти на прогулку. Сейчас дождя нет, но что-то собираются тучи. Нужно решить, надевать плащ или не стоит.

Мы собираемся поехать в противоположный конец города. Туда ведут десятки разных маршрутов; можно ехать трамваем, автобусом, троллейбусом. Как удобнее и быстрее проехать? Снова требуется принять решение.

И даже просто переходя улицу, человек решает, как это сделать безопасно и быстро.

Каждый из своего опыта знает, что найти наилучшее решение далеко не просто. Тут нужен расчет. Поэтому люди придумали специальную науку о расчетах правильных решений. Называется она «исследование операций». Об этой-то науке и пойдет у нас разговор.

Наука «исследование операций» родилась во время второй мировой войны и предназначалась сперва исключительно для военных надобностей: с ее помощью обосновывали боевые решения. Когда война окончилась, методы исследования операций стали находить все более широкое применение в мирной жизни: в экономике, на транспорте, в управлении производством, в торговле. В этих областях народного хозяйства с помощью исследования операций разрабатываются способы выработки наилучших решений.

Исследование операций — наука молодая. Многое в ней, как говорится, еще впереди. Это дало повод одному серьезному ученому для такого мрачного определения: «Исследование операций представляет собой искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются еще худшие ответы другими способами».

Иногда, впрочем, можно услышать и более оптимистическую оценку новой науки: «Исследование операций — это сгусток здравого смысла».

Для того чтобы готовить наилучшие решения, исследование операций призвало на помощь математику: алгебру, геометрию, тригонометрию.

Математика — язык, на котором сегодня говорит любая точная наука. Современная физика, химия, астрономия не мыслима без математики.

В наши дни математика прочно вошла и в такие науки, как биология, медицина, в науку о языке.

Многие крупнейшие научные открытия последнего времени стали возможны именно благодаря успехам математики. Кибернетика, законы наследственности, электронно-вычислительные машины рождены математикой.

Сбываются слова основоположника научного коммунизма Карла Маркса: «Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой».

Математика лежит и в основе науки о правильных решениях — исследования операций.

Ведь перед тем как решать, необходимо произвести расчет. Это, конечно, не просто, и я боюсь, что уже в этом месте книжки ряды наших читателей заметно поредеют. Но зато те из них, кто не побоятся трудностей, получат ответы на такие разные, но чем-то связанные между собой вопросы:

— Чем отличается погоня за преступником от погони за зайцем?

— Почему бутерброд падает маслом вниз?

— Как прочитать шифрованное письмо?

— Как бомба могла попасть в единственного в Ленинграде слона?

— Сколько нужно иметь лотерейных билетов, чтобы выиграть?

— Почему мы уверены, что план будет обязательно выполнен?

— Как выкроить лишний автомобиль?

— Что делать, если кажется, что забыл выключить телевизор?

— Как слабому победить сильного?

И наконец:

— В чем главный секрет великих полководцев?

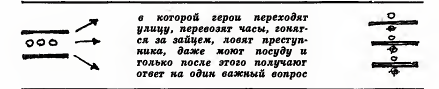
Не раскрывая до поры всех этих секретов, постараемся понять, что в них общего. Объединяет эти очень разные вопросы то, что все они содержат сложную задачу, требуют найти выход из трудного положения, избрать правильный способ действий. Над подобными вопросами ломают голову не только полководцы, но и люди самых разных профессий, каждый, кто решает.

Это дает нам право называть великими полководцами не только военачальников, но и всех тех, кто умеет принимать верные решения, решения, ведущие к победе.

Итак, вперед! Нас ждет путь, требующий ума и терпения, осторожности и смелости, путь, полный трудных загадок и неожиданных решений, короче — перед нами путь, достойный великих полководцев.

Глава 1

АЗБУКА ВЕЛИКИХ ПОЛКОВОДЦЕВ,



в которой герои переходят улицу, перевозят часы, гонятся за зайцем, ловят преступника, даже моют посуду и только после этого получают ответ на один важный вопрос

ПРАВИЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ — ЧТО ЭТО ТАКОЕ?

Все мы с детства привыкли решать разные задачи: сначала по арифметике, затем по алгебре и геометрии, физике и химии. Мы умеем рассчитывать, сколько нужно времени, чтобы проехать на велосипеде из пункта A в пункт B, чему

равна площадь участка в форме прямоугольника, какова сила и напряжение электрического тока.

В жизни, однако, на каждом шагу приходится решать задачи, которые не всегда укладываются в обычную школьную премудрость. Начнем с самой простой.

Мы собираемся зайти в магазин, который на рисунке обозначен буквой *М*. Наше место — в точке *А* на противоположной стороне улицы.

К магазину ведут два пути: один показан сплошной линией, второй — прерывистой. Возникает, правда, еще соблазн сократить путь общеизвестным способом — по прямой, но, чтобы его исключить, поместим в центре перекрестка милиционера.

Итак, два пути. Нужно выбрать, какой из них лучше. Этот выбор, очевидно, и будет нашим решением.

Можно ли, однако, сразу решить эту, казалось бы, простую задачу? К сожалению, пока нельзя. Ведь от нас требуется л у ч ш и й путь. А что значит лучший? Как мы сейчас увидим, слово «лучший» можно понимать поразному.

Например, «лучший путь — самый короткий». Так думают многие. Милиционеры и дружинники еле успевают сдерживать напор тех пешеходов, для которых главное при переходе улицы — быстрота.

В нашей задаче, впрочем, можно быстро попасть в магазин и не вступая в конфликт с блюстителями порядка — достаточно пойти по прерывистой линии. Она в два раза короче, чем сплошная.

Казалось бы, задача решена. Но...

«Лучший путь — самый безопасный». Так думают те, кому не чуждо древнее чувство самосохранения. А наш путь по прерывистой линии, увы, в два раза опаснее, чем по сплошной: число переходов через дорогу возросло вдвое.

Так какое же решение из двух правильнее?

Видимо, читатель уже догадался. Правильного решения на все случаи жизни не бывает. Лучшее решение — то, которое отвечает поставленной цели:

цель: быстрота — решение идти по прерывистой линии;
цель: безопасность — идти по сплошной линии.

Недаром поется в песне: «Чем смелее идем к нашей цели, тем скорее к победе придем». Как только появляется ясная цель, сразу же приходит и понятное решение.

Правда, цель не всегда так проста, как в нашем примере. Ведь может возникнуть необходимость не только безопасно пройти в магазин, но и как можно быстрее. Как быть в этом случае?

Идеальным решением был бы переход через дорогу по линии, отмеченной кружками: это самый быстрый и одновременно безопасный путь. Он в два раза быстрее пути по сплошной линии и в то же время дважды безопаснее его. К тому же это идеальное решение нам буквально ничего не стоит: по сравнению с путем по прерывистой линии безопасность возросла вдвое, а путь ничуть не увеличился.

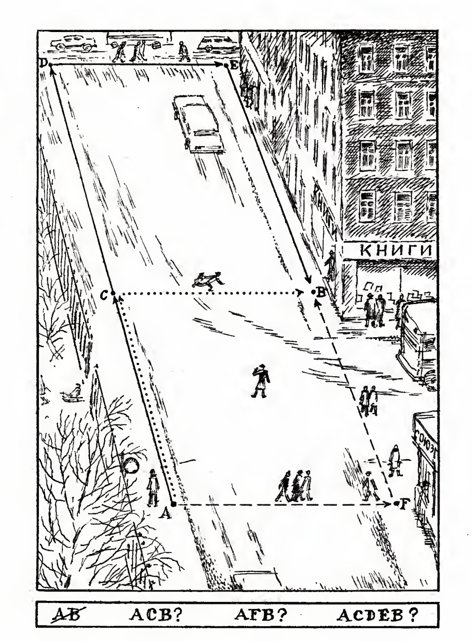
Правда, как мы видим, перехода здесь пока нет, и идеальное решение повисает в воздухе. Значит, придется предложить на будущее организовать дополнительный переход в этом самом удобном месте — по кружочкам. А пока совместить требования безопасности и быстроты невозможно, придется выбирать то из двух возможных решений, которое отвечает главной цели. Например, если самое важное — безопасность, с временем можно и не посчитаться и идти дальней дорогой.

Так и полководец, принимая решение в бою, видит перед собой главную цель — победу над врагом. Ради этой цели можно многим пожертвовать. Врач-хирург, решаясь на сложную операцию, прежде всего заботится о здоровье больного. Главное требование к результатам труда инженера, рабочего на заводе — качество продукции.

И при решении обычной школьной задачи, скажем, по алгебре, также могут быть поставлены разные цели, предъявлены различные требования. Если задача задана на дом, то быстрота ее решения — это не основное. Главное — решить верно, ведь времени обычно достаточно. Иное дело — решать задачу у доски. Здесь важна быстрота — нельзя же решать одну задачу целый урок. Даже если немножко и ошибся — учитель поправит. А вот на контрольной работе и быстрота и правильность одинаково важны: времени в обрез и поправить некому.

Итак, прежде чем решать что-либо, нужно наметить цель, найти то главное требование, от которого зависит успех. И тогда правильное решение обеспечено.

Цель — прежде всего. А что потом? Об этом пойдет речь в следующем рассказе.



~~AB~~ ACB? AFB? ACDEB?

ДАЛЬШЕ — ДЕШЕВЛЕ ИЛИ БЛИЖЕ — ДОРОЖЕ?

На этот раз речь пойдет о перевозке важного груза — партии часов из пункта A — завода, на котором часы делают, в пункт B — город, в котором часы нужны людям.

Часы можно перевозить тремя путями: по железной дороге, по реке и по воздуху.

Самый дальный путь — речной — 1000 километров; он требует четырех суток. Несколько короче железнодорожный путь — 700 километров — 12 часов. Наиболее короткий путь — воздушный — 500 километров — один час.

Необходимо решить, какой путь выбрать.

На первый взгляд лучше всего доставлять часы самолетом: всего через час груз будет на месте.

Время доставки часов, однако, не имеет решающего значения, ведь они не относятся к скоропортящимся грузам.

Важно сделать так, чтобы перевозка обходилась дешевле, тогда и стоимость груза станет поменьше. Это главное.

Следовательно, главная цель нашего решения — произвести доставку часов как можно дешевле.

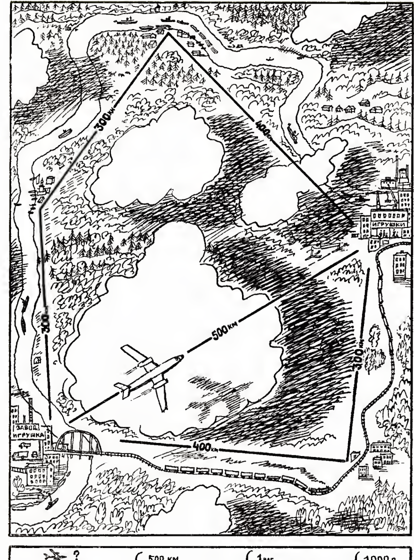
Поинтересуемся, сколько стоит перевозка груза разными видами транспорта. Оказывается, при перевозках партии часов по речному пути каждые 10 километров обходятся в 80 копеек, по железной дороге — 1 рубль, а по воздуху — 2 рубля. Самый дешевый путь — водный.

Значит, повезем по воде? Не будем торопиться с решением. Вспомним о цели. Ведь она заключается не в том, чтобы выбрать самый дешевый вид транспорта. Главное — удешевить перевозку по всему пути от завода до города. А общая стоимость такой перевозки зависит не только от вида транспорта, но и от расстояния. Именно эта общая стоимость и будет служить нам мерой для выбора наилучшего решения.

С помощью такой меры легко подсчитать, во что обойдутся перевозки по различным путям:

по воде:	1000 км×80 коп/км=800 руб.,
по железной дороге:	700 км× 1 руб/км=700 руб.,
по воздуху:	500 км× 2 руб/км=1000 руб.

Достаточно сравнить результаты, как ни у кого не останется сомнения, какой путь, какое решение лучше. Везти по железной дороге!


300км
400км
300
500км
300км
400км
ЗАВОД
ИГРУШКА
ИГРУШКИ
?
?
?
S
500 км
1000 км
700 км
t
1 час
98 часов
24 часа
стоимость перевозки
1000 р.
800 р.
700 р.

Полезно вернуться к самому началу разговора о перевозке часов и проследить, как мы пришли к столь очевидному решению. Для этого нам, оказывается, понадобилось сделать всего три шага.

Первый шаг. Определена цель решения — сделать перевозку как можно дешевле.

Второй шаг. Сделана оценка, расчет всех возможных решений, ведущих к цели.

Третий шаг. Сравнение оценок позволило выбрать наилучшее решение.

Третьего шага, кстати, может и не быть, если задача допускает только одно-единственное решение. Тогда это решение принимается без всякого выбора.

Таков наш путь к решению. Хорош ли он?

Для того чтобы разобраться в этом, вспомним, кому еще кроме человека приходится решать сложные задачи.

ЧЕМ ОТЛИЧАЕТСЯ ЧЕЛОВЕК ОТ ПЧЕЛЫ?

Как-то ученые-архитекторы решили рассчитать идеальный склад. Требовалось найти такую конструкцию, которая при самом малом расходе строительного материала обладала бы наибольшей возможной прочностью и вместимостью.

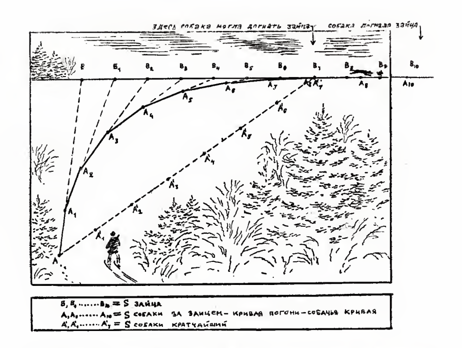
Когда этот сложный расчет был выполнен, оказалось, что ученых опередили... пчелы. Построенные ими без всяких чертежей соты с большой точностью воспроизводили размеры идеального сооружения, рассчитанного по всем правилам науки.

Выполнять сложные задачи, находить выход из трудных положений могут, подобно пчелам, и другие живые существа.

Инстинкт — врожденная способность выполнять необходимые действия — вот что дает возможность бобру строить отличную плотину, а голубю — находить дорогу к дому. Инстинкты в определенной степени свойственны человеку. Так стоит ли размышлять над решением? Не является ли инстинктивное решение наилучшим?

...По полю бежит заяц. Его преследует собака.

Будем считать, что путь зайца — прямая линия. Собака всегда инстинктивно стремится бежать прямо на зайца. Поэтому в начале погони, когда собака в точке A, ее путь



направлен на точку B, в которой в этот момент находится заяц. Собака в точке A_1 — ее путь направлен в B_1 и так все время, пока вблизи точки (A_{10}, B_{10}) не произойдет роковая для зайца встреча.

Если проследить весь путь собаки от начала до конца, то видно, что пес бежит по кривой линии. Эта линия так и называется: кривая погони или просто — собачья кривая.

Собачья кривая не самый короткий путь, ведущий собаку к желанной встрече. На рисунке ясно видно, что если бы собака бежала по прямой, находясь в соответствующие моменты в точках A'_1 и A'_2 и так далее, то встреча могла бы произойти значительно раньше, уже в точке (A'_7, B_7). Прямая всегда короче ломаной.

Однако такое наилучшее решение «не по зубам» собаке. Ведь для правильного маневра нужно произвести расчет, а наш пес, со всеми своими собачьими инстинктами, в расчетах, увы, не силен. Собака, как и всякое животное, не обладает разумом, она не способна мыслить.

Карл Маркс по этому поводу писал: «Паук совершает операции, напоминающие операции ткача, и пчела постройкой своих восковых ячеек посрамляет некоторых людей — архитекторов. Но и самый плохой архитектор от наилучшей пчелы с самого начала отличается тем, что прежде чем строить ячейку из воска, он уже построил ее в своей голове».

Значит, главное, что отличает человека, принимающего решение, от существа, живущего инстинктами, это разум, способность мыслить и творить без шпаргалки.

Как же организует погоню человек, какое решение он в этом случае принимает?

МОДЕЛЬ «ПРЕСТУПНИК НА ШОССЕ»

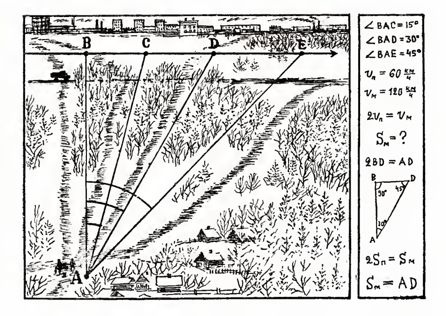
На этот раз погоню ведут милиционеры — работники уголовного розыска. В роли зайца здесь выступает опасный преступник. Милиционеры с мотоциклом в засаде ожидают бандита на пересечении лесных дорог в точке A.

Поступило сообщение по радио: «Преступник за рулем грузовика-самосвала. Он мчится по шоссе со скоростью примерно 60 километров в час».

В ту же минуту в конце лесной дороги № 1 на шоссе показался самосвал (точка B). Скорей на мотоцикле на перехват бандита! Но по какой дороге? Ведь нужно выскочить на шоссе в том же месте, где к этому времени окажется преступник. Только в этом случае удастся захватить его врасплох. Скорость мотоцикла около 120 километров в час.

Ясно, что по дороге № 1 ехать бессмысленно. Пока мотоцикл доберется до шоссе, преступник уже будет далеко. Какую же из оставшихся трех дорог выбрать? Придется вспомнить геометрию.

Видимо, нужно выбрать такую дорогу, чтобы путь по ней был ровно в два раза длиннее, чем путь преступника на шоссе до пересечения с этой дорогой, — ведь мотоцикл движется в два раза быстрее, чем грузовик. Заметим, что дороги под номерами 2, 3, 4 проложены по отношению к дороге № 1 под разными углами. Один из этих углов — 30°. В прямоугольном треугольнике ABD катет BD, лежащий против этого угла, равен, как известно, половине гипотенузы AD. Следовательно, направив мотоцикл по дороге № 3,



милиционеры окажутся на шоссе в точке *B* одновременно с преступником, и ему некуда будет деться. Между тем, выбрав дорогу № 2 и № 4, милиционеры попали бы на шоссе не одновременно с бандитом, и он имел бы время уйти от погони.

Угол между направлениями дорог № 1 и № 3, который приводит милиционеров в точку встречи с преступником, называется углом упреждения. В данном случае он равен 30°. Мы уже видели в предыдущем рассказе, что собака найти угол упреждения не может и вынуждена бежать по более длинной кривой линии.

Собака в погоне за зайцем, так же как и пчелы при постройке сот, решает свою задачу инстинктивно, пользуется готовыми правилами, полученными по наследству от своих предков.

Ведя погоню за преступником, работники уголовного розыска призвали на помощь разум. Вначале они продумали план действий. Для этого пришлось представить себе ход предстоящей операции, как бы построить ее модель.

Такая модель — план операции — и показана на рисунке 4. И подобно тому как бамбуковая модель самолета помогает понять устройство настоящего аэроплана, модель погони показывает, как лучше поймать преступника: дорога № 3, нарисованная на плане, в лесу приводит милиционеров в точку встречи с бандитом. Ведь и на модели и на местности путь мотоцикла по этой дороге ровно в два раза длиннее, чем путь грузовика по шоссе.

План перехода через улицу, схема перевозки часов — все это модели предстоящих действий, которые помогают выбрать правильное решение.

Создание моделей — чисто человеческий способ такого выбора. Модель предстоящих действий не обязательно рисовать на бумаге. Ее можно «построить» и мысленно. Подобно тому как мы решаем устно некоторые не особенно сложные арифметические задачи.

Посмотрим, как выглядит такое устное принятие решения в жизни, на практике.

ПОСЛЕДНЯЯ ОЧЕРЕДЬ В ЛЕСУ

Дело было в пионерском походе. Только что окончился обед, и ребята — несколько сот человек — должны были вымыть посуду, каждый свою. Хорошо, что посуды было немного — по одному котелку с ложкой.

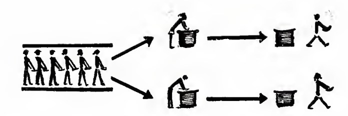
Дежурные нагрели четыре больших бака воды: в двух посуда должна была промываться, в двух других прополаскиваться.

И сразу же у первых двух котлов возникла очередь. Сначала небольшая, она все росла: ребята не успевали мыть посуду.

В районе, где пионеры вели неравный бой с посудой, появился старший вожатый. Несколько минут он молча наблюдал за полем брани, поглядывая на часы, затем что-то скомандовал.

Чудо произошло прямо на глазах: очередь быстро пошла на убыль, и вскоре дежурный рапортовал вожатому о том, что посуда вымыта.

Это был предметный урок принятия быстрого и правильного решения. Как же это происходило? Какую команду подал вожатый?



Мы уже знаем, какие три шага следует сделать, чтобы прийти к правильному решению.

Сначала определить цель действий, затем сделать оценку обстановки — возможных путей, ведущих к цели, и, наконец, выбрать наилучшее решение из всех возможных.

Вожатый так и поступил.

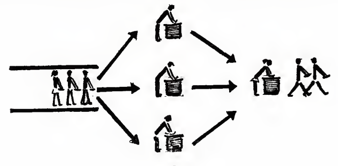
Прежде всего цель. Она ясна: сократить общее время мытья посуды.

Потом оценка обстановки. Вожатый не зря следил за временем. Часы показали, что мытье котелка и ложки занимает, в среднем, четыре с половиной минуты. На споласкивание же посуды требовалось около полутора минут. Теперь можно выбрать решение.

Сравним полученные результаты. Это потребует небольшого расчета. Во сколько раз больше времени уходит на мытье, чем на споласкивание?

$$\frac{4{,}5}{1{,}5} = 3 \text{ раза.}$$

Этот устный расчет и был той мысленной моделью, которая помогла вожатому прийти к верному решению. Наи-



лучшим решением, очевидно, будет такое, при котором для мытья будет в три раза больше возможностей, чем для споласкивания. Последовала команда: «Мыть в трех баках, споласкивать в одном!»

Итак, вначале оценка обстановки, затем расчет, и в итоге — решение.

Если бы решение оказалось неправильным (очередь не уменьшилась), то это означало бы, что где-то допущена ошибка и решение нужно подправить с учетом приобретенного опыта. Значит, снова оценка обстановки, снова расчет — и новое, теперь уже, наверное, правильное решение.

И какое бы решение ни принималось — от самого простого до наисложнейшего, устно либо с помощью сложных расчетов, — порядок, или, как говорят, процедура принятия решения, остается такой же.

Врач, решаясь на рискованную операцию; следователь, распутывая трудное дело; агроном, устанавливая срок уборки урожая; сталевар, определяя, можно ли разливать металл, — все они вначале оценивают обстановку, затем обдумывают, как лучше поступить, производят необходимые расчеты и наконец принимают решение — как быть. Решение проверяется на деле и, если нужно, подправляется.

Как мы видим, принятие решения, особенно в сложных жизненных ситуациях, далеко не простое дело. Это дает основание говорить о том, что умение решать — особое искусство. Сразу же возникает опасение, не является ли искусство избирать верные решения уделом избранных, вроде виртуозной игры на скрипке или сложения хороших стихов. Можно ли научиться принимать правильные решения?

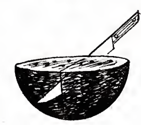
МОЖНО ЛИ ВЫУЧИТЬСЯ НА ВЕЛИКОГО ПОЛКОВОДЦА?

Принимать решения люди начали очень давно, в незапамятные времена. Окруженный хищниками, не очень мощный физически, человек стал непобедимым благодаря тому, что в процессе труда научился решать сложные жизненные задачи. Ведь никто, кроме человека, на земле не умел этого делать, не умел трудиться. Инстинкт животного, как мы видели на примере собачей погони, далеко не всегда дает нужный результат. А осмысленное человеческое решение в большинстве случаев приводит к победе.

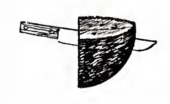
Умением принимать и проводить в жизнь необходимое решение, или, как принято говорить, решительностью, отличались многие великие люди: знаменитые ученые, политические деятели, изобретатели. Всем этим людям принимать верные решения помогала интуиция — особая способность находить правильную линию поведения в сложной обстановке.



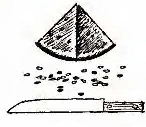
Интуиция кое в чем напоминает инстинкт. Она дает людям возможность решать трудные задачи правильно и быстро, без каких-либо расчетов, что называется, «на глаз». Интуиция основана на опыте, знаниях, зависит она и от врожденных качеств человека.



Великие полководцы всех времен и народов тем и отличались от своих менее способных противников, что имели высоко развитую интуицию. Они «чувствовали», когда, где и как нанести удар по врагу, умели молниеносно оценить обстановку и прийти к правильному решению.



Мы тоже часто полагаемся на свою интуицию. Так, вряд ли мы будем долго размышлять и вести какие-либо расчеты по поводу того, надеть плащ, выходя из дома, или нет. Решение принимается в этом случае интуитивно, исходя из опыта: пасмурно — надеваю плащ, ясная погода — плащ остается дома.



Без особых размышлений и расчетов мы решаем и другие подобные задачи. И, как правило, удачно. Но вот попробуйте интуитивно решить, как догнать преступника или вывести ракету в нужную точку прост-

ранства. Интуиция наверняка даст осечку. Здесь требуется расчет.

В каких же случаях интуиция нам отказывает?

Решим такую задачу.

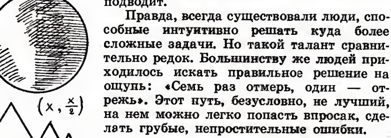
На сколько частей нужно разделить арбуз весом в четыре килограмма так, чтобы в каждой доле было по полкилограмма? Думаю, все ответят одинаково правильно и быстро — на восемь частей.

А вот теперь еще одна сходная задача.

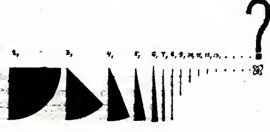
Мысленно разделите земной шар пополам, одну половину отбросьте, а оставшуюся снова разделите на две части, снова отбросьте половину и так далее. Нужно решить, сколько таких делений потребуется, чтобы последние половинки были размером с атом.

Мне приходилось неоднократно задавать эту задачу, и обычно я слышал в ответ: сотни тысяч раз, миллионы, миллиарды раз, и почти никто не решил правильно — 80 раз.

Причина всеобщей ошибки в том, что мы сталкиваемся здесь с задачей непривычной, в решении которой у нас нет никакого опыта. В школьных учебниках подобной задачи нет, а в жизни едва ли кто-нибудь с ней встречался. И интуиция нас основательно подводит.



Правда, всегда существовали люди, способные интуитивно решать куда более сложные задачи. Но такой талант сравнительно редок. Большинству же людей приходилось искать правильное решение на ощупь: «Семь раз отмерь, один — отрежь». Этот путь, безусловно, не лучший, на нем можно легко попасть впросак, сделать грубые, непростительные ошибки.



Чтобы избежать этих ошибок, необходимо, как мы видели, знать определенные правила, способы и расчеты верных решений.

Конечно, тот, кто принимает решение, не ограничивается одними расчетами, которыми его снабжает наука. Сегодня, как и в прошлом, опыт и интуиция играют огромную роль. В этом смысле принятие решений остается искусством, требующим способностей и таланта. Не обойтись здесь и без волевых качеств: решительности, смелости, упорства.

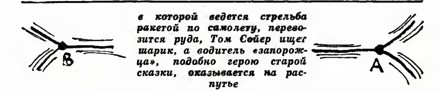
Сейчас, однако, в отличие от прошлых лет, каждый, кому это необходимо, может призвать на помощь науку о решениях. Она даст необходимые знания. Искусством великого полководца можно овладеть.

Мы только что побывали в школе великих полководцев, в ее самом первом классе. Как и полагается в школе, вначале мы освоили азбуку. Теперь можно приниматься за чтение. Но что читать? На чем остановиться?

Чтобы в этом разобраться, необходимо выяснить, какие задачи приходится решать великим полководцам.

Глава 2

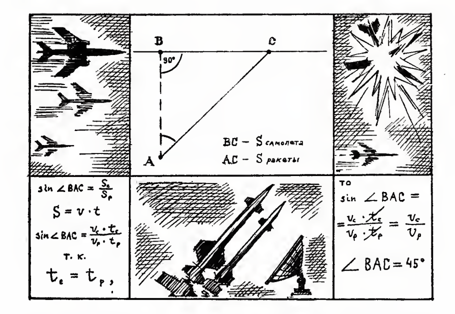
РАКЕТА, ТОМ СОЙЕР И ДРУГИЕ,



в которой ведется стрельба ракетой по самолету, перевозится руда, Том Сойер ищет шарик, а водитель «запорожца», подобно герою старой сказки, оказывается на распутье

РАКЕТОЙ ПО САМОЛЕТУ

Бомбардировщик на большой скорости — около 700 километров в час — приближается к важному объекту противника. Еще минута — и полетят бомбы. Но не тут-то было. Наготове зенитная ракета. Необходимо без промедления



поднять ее в воздух. Куда направить ракету? Какой должен быть при этом угол упреждения (вспомним погоню за преступником)?

Обозначим начальное место самолета буквой B, начальное место ракеты — буквой A и точку встречи — буквой C.

Нетрудно сообразить, что если самолет пролетает мимо ракетной установки и угол ABC — прямой, то в прямоугольном треугольнике ABC:

$$\text{Sin}\angle BAC = \frac{BC}{AC}$$

или

$$\sin \text{угла упреждения} = \frac{\text{путь самолета}}{\text{путь ракеты}}.$$

Из школьного курса физики мы знаем, что путь равен произведению скорости на время движения:

$$\sin \text{угла упреждения} = \frac{\text{скорость самолета} \times \text{время полета до встречи}}{\text{скорость ракеты} \times \text{время полета до встречи}}.$$

Поскольку время полета самолета и ракеты до их встречи должно быть одинаково — иначе встреча просто не состоится — и принимая скорость ракеты равной 1000 километров в час, можем написать:

$$\sin \text{угла упреждения} = \frac{\text{скорость самолета}}{\text{скорость ракеты}} = \frac{707}{1000} = 0{,}707.$$

А сам угол упреждения, как утверждает таблица синусов, при этом равен 45°.

Произведенный нами расчет выполняет в считанные секунды специальная вычислительная машина — автомат стрельбы.

Стоит навести теперь ракету по вычисленному углу, и самолету несдобровать.

Не кажется ли вам, что вы с чем-то похожим уже встречались? Действительно, все здесь очень напоминает ту задачу, с которой пришлось повозиться милиционерам в погоне за преступником: и там и здесь речь шла о правильном движении — маневре.

Особенность подобных решений в том, что они получаются с помощью обычной геометрии или тригонометрии. Решение таких задач, как правило, приводит к единственному возможному результату. Тут не с чем сравнивать, не из чего выбирать. И путь милиционера по дороге № 3, и путь ракеты на перехват бомбардировщика — это единственные возможные решения поставленных задач. Все остальные пути ни к чему не приводят.

Не всегда, однако, решать приходится не выбирая: возможных путей может быть несколько, и нужно уметь выбрать лучший.

ПУТИ, КОТОРЫЕ МЫ ВЫБИРАЕМ

Шахтеры, железнодорожники, металлурги столкнулись с нелегкой задачей.

На шахтах, расположенных в разных районах нашей страны, идет добыча руды, которую по железной дороге доставляют на несколько металлургических комбинатов для выплавки металла. Расстояния от шахт до каждого комбината разные, различна поэтому и стоимость перевозки руды. Необходимо так спланировать доставку руды на ком-

бинаты, чтобы общая стоимость перевозок была как можно меньше.

Эта задача чем-то похожа на историю с перевозкой часов, с которой мы познакомились ранее. И там, и здесь речь идет о выборе наилучшего решения из ряда возможных. Дело здесь, однако, значительно сложнее: перевозка руды, в отличие от перевозки часов, производится из нескольких пунктов отправления в разные пункты назначения. И нужно найти, сколько руды по каждому из этих маршрутов отправить.

Можно было бы попытаться перебрать все возможные варианты перевозок по разным направлениям, оценить их стоимость и выбрать путем сравнения самый дешевый. Казалось бы, что может быть проще. Но тут возникает совершенно неожиданное препятствие — время. Не то время, которое нужно на перевозку руды, а время на... расчеты всех вариантов. С помощью специальных математических формул можно подсчитать, что число таких вариантов может достигать сотен миллионов, а время на расчеты — десятков лет. Даже если считать не вручную, а с помощью современной вычислительной техники.

Видимо, сразу ответ на эту задачу нам не получить. Тут простой арифметикой с геометрией явно не обойдешься. Придется до поры до времени отложить решение.

Не поможет обычная математика решить и следующую, впрочем, многим известную задачу.

БРАТ, ПОДИ СЫЩИ БРАТА

«Он вернулся к своему тайнику и встал на то самое место, с которого только что бросил шарик, потом вынул из кармана другой и бросил его в том же направлении:

— Брат, поди сыщи брата!

Он заметил, где остановился шарик, и стал искать там, но не нашел. Должно быть, второй шарик или не докатился, или залетел слишком далеко. Он попробовал еще раз, другой, третий и наконец добился успеха: оба шарика лежали на расстоянии фута друг от друга».

Том Сойер, о котором шла речь, конечно, не знал теории исследования операций, но действовал как заправский специалист.

Том сообразил, что искать нужно не как попало, а по определенным правилам. Как же их узнать?

Видимо, правила эти должны быть одни и те же для всех шариков одинакового размера и веса. Второй шарик понадобился Тому для того, чтобы выведать правила поиска.

Почему Тому Сойеру пришлось бросать шарик неоднократно?

Дело в том, что законы поиска проявляются не обязательно каждый раз (тогда бы шарик нашелся сразу же), а лишь в некоторой части случаев. О таких событиях, которые иногда случаются, а иногда и нет, говорят, что они подчиняются воле случая, носят случайный характер. Обнаружение шарика при поиске как раз представляет собой такое случайное событие.

С подобными задачами приходится сталкиваться не только Тому Сойеру. Жизнь полна случайностей. Случайной оказывается погода: нельзя заранее абсолютно точно предсказать, какой она будет не то что завтра, но даже через полчаса. От случая зависит процент брака на заводе, урожай фруктов в будущем году, количество петушков и курочек на птицефабрике.

Можно ли найти правильное решение там, где многое зависит от случайности? Оказывается, можно. Об этом со временем пойдет у нас особый разговор.

А пока познакомимся еще с одной жизненной задачей, не похожей на те, с которыми мы до сих пор встречались.

«ЗАПОРОЖЕЦ» НА РАСПУТЬЕ

Эту историю рассказал один из моих друзей, заядлый автолюбитель.

«После долгого пути я остановил свой покрытый пылью «запорожец» у дорожного перекрестка. Здесь шоссе разветвлялось, и я решил спросить кого-нибудь, как держать путь дальше, к цели моего путешествия.

Мне повезло. Рядом оказалось трое дорожных рабочих.

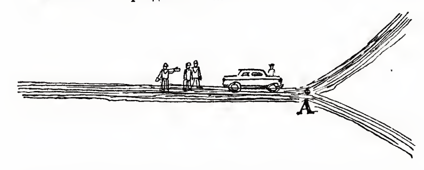
— Поедешь прямо, — уверенно сказал один. — Дорога хорошая, через час будешь на месте.

— Прямо нельзя, — возразил другой. — Дорогу размыло, ехать по ней часов пять придется.

— Ничего подобного, — возразил первый. — Размыло-то размыло, да уж давно исправили. Теперь она как новенькая. Езжай прямо, не ошибешься. Час — и там.

— Дорога, конечно, размыта, — вступил в разговор третий, — но есть объезд. Путь в объезд займет часа четыре.

Мнения явно разделились...



Что касается меня, то я в этот момент очень напоминал героя старой сказки, известного нам по картине художника В. М. Васнецова под названием «Витязь на распутье».

Меня, как и витязя, мучила проблема: «Куда податься?». С одной стороны — большинство голосов за то, что прямая дорога размыта, с другой — очень уж долго объезжать.

Не рискнуть ли все же и поехать напрямик?

Задача была не из легких: принять одно из двух возможных решений в неопределенной обстановке, почти вслепую.

И я решился — ведь не оставаться же мне на перекрестке. Рассудил я очень просто: раз большинство за то, что основная дорога размыта, значит — в объезд. Верно ли я решил?»

Оставим пока вопрос нашего автовитязя без ответа. Ведь мы еще сами не научились принимать решения в неопределенной обстановке.

Решения в неопределенной обстановке, или, как говорят, в условиях неопределенности, в жизни приходится принимать довольно часто. Намного чаще, чем принято считать. Неопределенность возникает всякий раз, когда приходится действовать, не зная, к каким результатам это может привести.

Необходимость в таких решениях появляется обычно в тех случаях, когда нашим действиям кто-то или что-то препятствует, мешает; причем, мы точно не знаем, что от этой помехи можно ожидать. В этих условиях приходится идти на риск.

Люди вынуждены рисковать, принимая важные решения, именно в тех случаях, когда не имеют определенных данных об обстановке, а бездействовать и выжидать нельзя. Если бы им все было ясно с самого начала, никакой неопределенности не было бы и надобность в риске отпала бы сама собой.

Вот, оказывается, куда ведет нас старая сказка о витязе на распутье. Сказка, которая, напоминаю, не окончена. И мы обязательно к ней еще вернемся.

Последнее обстоятельство дает нам возможность сделать небольшую остановку, не опасаясь, что читатели разбегутся.

Остановка нужна нам для того, чтобы разобраться во всех задачах, с которыми мы только что познакомились, понять, какую роль они играют в жизни и наметить план дальнейшего движения.

НАУКА ПОБЕЖДАТЬ

В жизни приходится решать самые различные задачи. Мы только что в этом убедились.

Трудность заключается в том, что каждая из этих задач требует своего особого решения. То, что помогло Тому Сойеру найти шарик, не поможет ракете найти цель. Выбор «идти через перекресток» сильно отличается от того выбора, который предстоит сделать водителю «запорожца».

Когда в школе задают математическую задачу, обычно всегда известно, по какому она предмету: по алгебре, по геометрии или по тригонометрии. Это, конечно, облегчает дело. Каждый предмет имеет свои способы решения, свои правила.

Решения задач, которыми занимается исследование операций, тоже относятся к нескольким различным предметам. Их, правда, в школе пока не изучают.

«Каждый воин должен понимать свой маневр», — писал великий русский полководец Александр Васильевич Суворов в своей знаменитой книге «Наука побеждать».

Понимание маневра, как мы видели, помогло работникам уголовного розыска поймать преступника, а ракетчикам — поразить самолет врага.

Умение маневрировать необходимо также капитанам и пилотам, разведчикам и космонавтам. Словом, всем тем, кому приходится иметь дело с перемещением различных объектов «на земле, в небесах и на море».

О том, как исследование операций решает подобные задачи, речь пойдет в третьей главе нашей книги.

Труженики нашей страны производят и перевозят огромные материальные ценности: топливо и металл, станки и машины, продукты питания, одежду и обувь. (Помните главку «Пути, которые мы выбираем»?) Как лучше спланировать эту работу? От хорошего плана во многом зависит рост народного богатства. Как выбрать наилучший план производства, наивыгоднейший способ перевозок? Как правильно и экономно раскроить ткань или металл?

Составлением, выбором наилучшего плана производства, перевозок, торговли, раскроя материалов в исследовании операций занимается математическое планирование, с которым мы познакомимся в главе четвертой.

Агрономы, инженеры, биологи и даже языковеды имеют дело с явлениями, которые подвластны случайностям. Никто заранее не может точно сказать, какая погода будет во время уборки урожая, какие детали и в каком количестве окажутся с браком, кто вылупится из яйца на колхозной птицеферме: петушок или курочка.

Чтобы разбираться в этих случайных явлениях, от которых зависит выполнение наших планов, уметь принимать правильные решения, не боясь никаких неожиданностей, необходимо овладеть еще одним важным предметом, входящим в исследование операций, — теорией вероятностей. Эта таинственная и непривычная теория потребовала для себя целых три главы — пятую, шестую и седьмую.

А вот рыбакам, китобоям, разведчикам и пограничникам часто приходится вести поиск. Как лучше и быстрее искать китов и морские мины, как правильно вести наблюдение на границе? На эти вопросы отвечает глава восьмая.

И наконец, еще один предмет с несколько легкомысленным названием: теория игр. На самом деле все здесь очень серьезно. Врачу иногда бывает неясно, как воспримет организм больного новое лекарство. Предсказывая погоду, си-

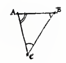
ноптик порой не имеет всех необходимых данных о состоянии атмосферы. Военачальник, как правило, не имеет точных сведений о том, что задумал неприятель. Всем им, подобно герою старой сказки — витязю на распутье, приходится принимать решения в неопределенной обстановке.

Теория игр как раз и решает такие задачи. О ней — глава девятая.

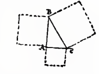
Таков краткий путеводитель по молодой науке «исследование операций», которой очень подходит суворовское название: «наука побеждать».

Следуя нашему путеводителю, прежде всего познакомимся с маневрированием.

Глава 3
ЗАЙМЕМСЯ МАНЕВРИРОВАНИЕМ,



в которой происходит встреча в космосе, предотвращается столкновение в море, ведется разведка и торпедный катер под огнем врага идет в атаку



ВСТРЕЧА В КОСМОСЕ

Командир космического корабля получил сигнал, которого ждал уже давно: подойти к орбитальной станции, произвести стыковку и перебраться на ее борт для дальнейшей работы.

Орбитальная станция — настоящий летающий остров — мчится в околоземном пространстве с немыслимой скоростью — шесть километров в секунду. Еще стремительней полет космического корабля: он может маневрировать со скоростью до восьми километров в секунду.

Первая задача, которую предстоит решить космонавтам, — произвести так называемое мягкое сближение. При этом скорость корабля по мере сокращения расстояния постепенно уравнивается со скоростью станции, с таким рас-

четом, чтобы к моменту полного сближения быть с ней одинаковой. Тут-то и производится стыковка. Ведь когда корабль и станция движутся рядом с равными скоростями, то относительно друг друга они неподвижны.

Космические объекты, в том числе наш корабль и орбитальная станция, движутся по сложным траекториям, в соответствии с законами небесной механики. Строгий расчет мягкого сближения сложен и нам явно не под силу.

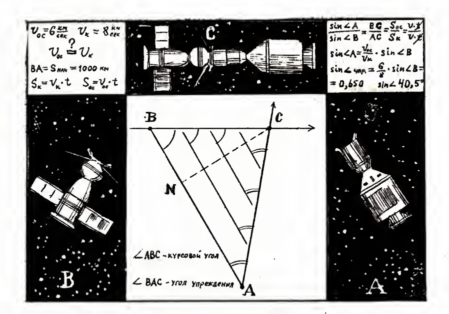
Поэтому рассмотрим лишь грубо приближенную модель этой интересной задачи. Будем считать, что оба наши объекта — корабль и станция — движутся по прямым линиям с постоянными скоростями. Примем также условно, что командир космического корабля рассчитывает вначале полное сближение с орбитальной станцией на полной скорости, а уж затем, где-то на подходе, гасит скорость до необходимой величины.

Итак, требуется произвести маневр полного сближения (как говорят, сближения вплотную) космического корабля A (скорость 8 километров в секунду) с орбитальной станцией B (скорость 6 километров в секунду). Будем считать, что в начальный момент корабль находится под углом 60° по отношению к курсу станции (этот угол называется курсовым углом), на расстоянии от нее 1000 километров.

Что значит рассчитать сближение вплотную? Мы уже решали подобные задачи сначала совместно с милицией, а затем с зенитчиками и знаем, что прежде всего нужно найти направление, ведущее к сближению. Для этого требуется знать угол упреждения.

Милиции и зенитчикам повезло: при расчетах угла упреждения они имели дело с прямоугольными треугольниками, и задача решалась довольно просто. Командиру космического корабля предстоит отыскать более трудное решение. Здесь треугольник ABC не прямоугольный, и придется проявить изобретательность.

Следует рассуждать так. Представим себе, что сближение вплотную уже состоялось и наши космические объекты встретились в точке C. Но это означает, что путь космического корабля до точки встречи (AC) равен произведению скорости этого корабля на время сближения, а путь орбитальной станции до точки встречи (BC) равен произведению скорости орбитальной станции на время сближения.



Теперь вспомним теорему синусов из тригонометрии: синусы углов треугольника относятся как противолежащие этим углам стороны. В нашей задаче это означает, что

$$\frac{\text{sin угла упреждения}}{\text{sin курсового угла}} = \frac{\text{скорость орбитальной станции} \times \text{время сближения}}{\text{скорость космического корабля} \times \text{время сближения}}.$$

Время сближения, к счастью, сокращается, и мы получаем довольно простую формулу для расчета угла упреждения:

$$\text{sin угла упреждения} = \frac{\text{скорость орбитальной станции}}{\text{скорость космического корабля}} \times \text{sin курсового угла}.$$

Подставим цифры и произведем расчет:

$$\text{sin угла упреждения} = \frac{6}{8} \sin 60° = \frac{6}{8} \times 0{,}866 = 0{,}650.$$

По таблицам синусов найдем: угол упреждения равен 40,5°.

Наша формула пригодна для решения любого треугольника, а значит — и для любого случая сближения вплотную.

Проверим теперь, правильно ли были рассчитаны углы упреждения в задачах о погоне за бандитом и о стрельбе ракетой по вражескому самолету.

Вначале найдем угол упреждения для перехвата бандита на шоссе:

$$\sin \text{ угла упреждения} = \frac{60}{120} \sin 90° = 0,5 \times 1,0 = 0,5,$$

а сам угол упреждения равен 30°.

А вот чему равен по нашей формуле угол упреждения зенитной ракеты:

$$\sin \text{ угла упреждения} = \frac{707}{1000} \sin 90° = 0,707 \times 1,0 = 0,707,$$

а сам угол упреждения равен 45°.

Следовательно, ошибок не произошло.

Самое интересное во всех этих расчетах то, что угол упреждения совершенно не зависит от расстояния между теми, кто сближается. А раз так, то, значит, этот угол от начала до конца маневра не меняется. Поэтому, как показано на рисунке, направление космического корабля на орбитальную станцию все время остается постоянным.

Помимо направления сближения, командиру космического корабля приходится решать еще одну задачу: сколько нужно времени для того, чтобы подойти к орбитальной станции вплотную? Или короче — каково время маневра?

Ответить на этот вопрос нам помогут два треугольника: BCN и ACN.

Стороны этих треугольников BN и NA в сумме равны начальному расстоянию BA:

$$\text{начальное расстояние} = BN + NA.$$

BN ищем в треугольнике BCN:

$$BN = \text{скорость орбитальной станции} \times \text{время сближения} \times \times \cos \text{ курсового угла.}$$

NA находим из треугольника ACN:

NA = скорость космического корабля × время сближения × ×cos угла упреждения.

Теперь, зная, чему равны слагаемые, можно написать:

начальное расстояние = $BN+NA$ = скорость орбитальной станции × × время сближения × cos курсового угла + скорость космического корабля × время сближения × cos угла упреждения.

Из этого следует, что интересующее нас время сближения равно:

$$\frac{\text{начальное расстояние}}{\text{скорость о. с.}\times\cos\text{ кур. уг.}+\text{скорость к. к.}\times\cos\text{ уг. упр.}}.$$

Подставим числа.

$$\text{Время сближения}=\frac{1000}{6\cdot\cos 60^\circ+8\cdot\cos 40{,}5^\circ}=\frac{1000}{6\cdot 0{,}5+8\cdot 0{,}758}=$$

$$=\frac{1000}{3{,}0+6{,}08}=\frac{1000}{9{,}08}=110\text{ сек.}$$

Итак, примерно через две минуты космический корабль, преодолев колоссальное, по земным представлениям, расстояние в 1000 километров, подойдет вплотную к станции. Своевременное торможение, мягкое сближение, стыковка — и вот уже космонавтов встречают на борту орбитальной станции. Можно рапортовать на Землю о том, что задание выполнено.

С задачей сближения вплотную, которую мы только что освоили, нам предстоит еще одна встреча. На этот раз — в тумане.

СХВАТКА В ТУМАНЕ

Лейтенант Карелин заступил на ходовую вахту в 4.00. Эсминец шел открытым морем. Курс 90°, ход полный — 28 узлов [1]. Видимость отличная. Штиль.

В 5.00 командир корабля сошел в каюту отдохнуть. Его

[1] Узел — мера скорости движения судов. Равен 1 миле (1,852 км) в час.

сменил старший помощник, который удобно расположился в кресле на правом крыле мостика.

Сначала Карелин не понял, что произошло. Еще несколько минут назад в предрассветной мгле то слева, то справа появлялись и исчезали огни встречных судов. И вот этих огней нет. Вокруг сплошная молочная пелена. Корабль вошел в полосу густого тумана.

Первое дело — сбавить скорость. Обе ручки машинного телеграфа переведены на малый ход. Скорость по лагу упала до 14 узлов. Команда сигнальщикам: «Начать подачу туманных сигналов». Приказание радиометристам: «Включить навигационный радиолокатор».

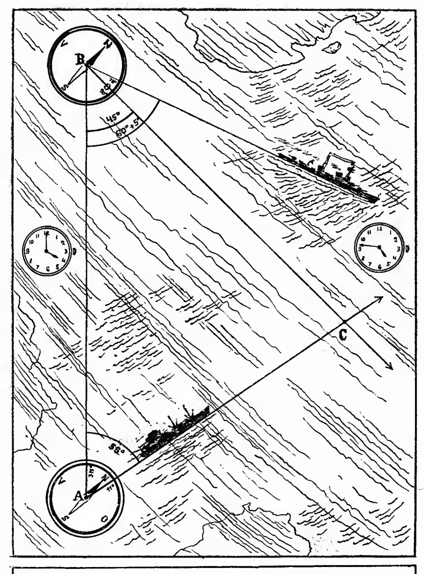
На затемненном экране, похожем на экран телевизора, характерные черточки — отметки от множества судов, которые в разных направлениях идут в тумане по своим маршрутам. Можно продолжать спокойное плавание... Если бы не одно пустячное на первый взгляд обстоятельство: направление на одну из черточек все время остается постоянным.

К счастью, Карелин хорошо знал, что предвещает такое постоянство. Это сигнал о том, что происходит сближение вплотную. Возможно столкновение! Какое-то судно, не обращая внимания на туманные сигналы (сейчас радиолокатор есть почти на каждом корабле) идет на явную гибель. Еще несколько минут — и острый нос эсминца, как нож в масло, войдет в борт незадачливого мореплавателя.

А может?.. Карелин слышал о том, что капиталисты-судовладельцы иногда специально устраивают столкновения судов, чтобы получить за свою старую, проржавевшую посудину солидную страховую премию.

Лейтенант отдал несколько коротких команд. В постах корабля началась быстрая и четкая работа. Уже через минуту после появления опасного объекта боевой информационный пост доложил: «Курс цели 11 градусов, скорость 10 узлов». Получены были эти цифры довольно просто. По данным радиолокатора место судна наносится на карту. Получается одна точка. Затем, через минуту, так же — вторая. Направление из первой точки на вторую и есть курс судна.

Путь судна между точками, деленный на время хода от первой точки до второй, дает его скорость. В нашем случае путь судна за 1 минуту был равен примерно 310 метрам.



AC — курс судна   BC — курс эсминца до начала уклонения

∠ BAC — угол упреждения   ∠ CBA — курсовой угол

$$\text{Скорость судна} = \frac{310}{1} = 310 \text{ метров в минуту} = 18{,}5 \text{ километра в час (10 узлов).}$$

Тем временем штурман рисовал на карте схему действий корабля и судна в тумане. Вот в верхней части рисунка эсминец. Он идет курсом 90 градусов (видите отметку курса на шкале компаса?). В нижней части рисунка под курсовым углом 45 градусов к курсу эсминца в расстоянии трех километров судно, идущее на столкновение курсом 11 градусов. Видно, что направление на него все время остается постоянным.

Вахтенный офицер рассчитал угол упреждения судна, ведущий к сближению вплотную, по той же формуле, которую в свое время использовал командир космического корабля:

$$\text{угол упреждения} = \frac{\text{скорость эсминца}}{\text{скорость судна}} \times \sin \text{курсового угла} =$$

$$= \frac{14}{12} \sin 45^\circ = 1{,}16 \times 0{,}71 = 0{,}825.$$

Угол упреждения равен 56°.

Посмотрите на шкалу компаса у судна. Между его курсом и направлением на эсминец действительно 56°. Значит, тревога лейтенанта была не напрасной. И времени осталось совсем мало. Вот знакомая формула:

$$\text{время сближения} =$$

$$= \frac{\text{начальное расстояние}}{\text{скорость эсминца} \times \cos \text{кур. уг.} + \text{скорость судна} \times \cos \text{уг. упр.}} =$$

$$= \frac{3}{26 \times 0{,}71 + 18{,}5 \times 0{,}56} = \frac{3}{18{,}5 + 10{,}4} = \frac{3}{28{,}9} = 0{,}1 \text{ часа} = 6 \text{ мин.}$$

Еще шесть минут — и...

Следует команда рулевому: «Лево на борт, курс семьдесят градусов!»

Лейтенант Карелин решил так вот почему.

Ему необходимо было повернуть корабль на безопасный курс. Этот курс должен быть таким, чтобы судно ни при каких обстоятельствах не смогло сблизиться с эсминцем вплотную. Можно, конечно, просто отвернуть от судна, оставив его за кормой, и, воспользовавшись преимуществом в скорости (14 узлов против 12), уйти. Но стоит

ли уходить так далеко от своего курса, ведь нельзя забывать и о задании, которое выполняет корабль. Нет ли лучшего решения?

И Карелин лучшее решение нашел. Попробуем сделать это и мы. Присмотримся к формуле угла упреждения.

$$\text{Sin угла упреждения} = \frac{\text{скорость эсминца}}{\text{скорость судна}} \times \sin \text{курсового угла.}$$

А что, если сделать получение этого угла упреждения, ведущего к столкновению, невозможным? Снова вспомним тригонометрию. Синус достигает своего наибольшего возможного значения, единицы, при угле 90 градусов. И больше ни при каких обстоятельствах стать не может. Посмотрим, как сделать, чтобы в первой части формулы появилась единица, а слева — соответствующий ей наибольший угол упреждения 90 градусов. Для этого достаточно, чтобы синус курсового угла стал равен:

$$\sin \text{курсового угла} = \frac{\text{скорость судна}}{\text{скорость эсминца}}.$$

Тогда формула угла упреждения станет такой, как нам нужно:

$$\sin \text{угла упреждения} = \frac{\text{скорость эсминца}}{\text{скорость судна}} \times \frac{\text{скорость судна}}{\text{скорость эсминца}} = 1$$

и угол упреждения равен 90°, то есть наибольшему возможному значению.

Чему же равен тот заветный курсовой угол, при котором это происходит? Формулу мы уже получили, теперь подставим цифры:

$$\sin \text{курсового угла} = \frac{\text{скорость судна}}{\text{скорость эсминца}} = \frac{12}{14} = 0{,}857,$$

а сам курсовой угол равен 60°.

Теперь если эсминец отвернет от судна так, что оно окажется у него на курсовом угле, большем 60 градусов, то дальнейшее увеличение угла упреждения станет невозможным и, следовательно, сближение вплотную будет исключено, что бы судно ни делало! Вот откуда появился курс эсминца 70 градусов. Ведь при нем курсовой угол = 65° = 60°+5°, то есть немного больше расчетной величины. Все это видно на рисунке. Выход из критического положения найден.

Кстати, этот наибольший курсовой угол, при котором еще возможно сближение вплотную, так и называется: критический курсовой угол.

Весь эпизод занял не больше времени, чем потребовалось читателю, чтобы о нем узнать.

«5.47. Отвернули на курс 70°. Уклонились от сближения вплотную с неопознанным судном», — записал Карелин в вахтенный журнал.

Не всегда, однако, маневр нужен лишь для того, чтобы сблизиться вплотную или избежать такого сближения.

МАНЕВР РАЗВЕДЧИКОВ

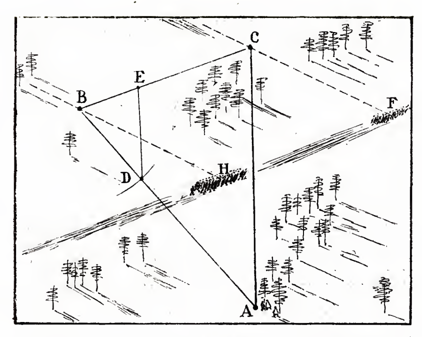
...Разведчики высунули головы из густого кустарника и приготовили бинокли. На шоссе показалась колонна вражеской пехоты.

Но наблюдения за колонной, ради которого велась разведка, не получилось. Помешало солнце, которое, как нарочно, вышло из-за туч и светило прямо в глаза. Кроме того, можно было в любую минуту ожидать, что враг заметит солнечные отблески на линзах биноклей, и тогда разведке конец.

— Без маневра не обойтись. — Командир разведчиков развернул планшетку. Расчет занял несколько минут.

Сначала командир отметил на карте положение разведчиков (точка A) и колонны (точка H) в момент обнаружения. Затем он нанес позицию, которую следовало бы разведчикам занять, чтобы солнце не слепило им глаза (точка B). Эта позиция, очевидно, должна быть по другую сторону шоссе — тогда солнце окажется за спиной у наблюдателей и не будет им мешать. К сожалению, выбранное для позиции место в точке B было бы хорошо лишь в том случае, если бы колонна стояла без движения. А ведь колонна-то движется. Как тут быть? Командиру разведчиков пришлось призадуматься. Ход его мыслей был примерно таков. Позиция B привязана к колонне — ведь она предназначена для наблюдения за врагом. Значит, можно считать, что эта позиция (она называется условной) движется вместе с колонной, параллельным ей курсом. И скорость условной позиции должна быть равна скорости колонны.

Отложим скорость колонны в любом масштабе от точ-



$\triangle ABC \sim \triangle DBE$

т. к. $DE \parallel AC$

$$\frac{AC}{DE} \overset{?}{=} \frac{BC}{BE}$$

(1)

Действительно:

$AC = S_{\text{разведчиков}}$

$\Rightarrow AC = v_p \cdot t$

(2)

$BC = HF$

$HF = S_{\text{колонны}}$

$\Rightarrow HF = BC = v_к \cdot t$

(3)

Подставляя (2) и (1) в (3), получим:

$$\frac{v_p \cdot t}{DE} = \frac{v_к \cdot t}{BE},$$

где $DE = v_p$ и $BE = v_к$ по построению

$\Rightarrow t = t$

ч. т. д.

ки B по направлению ее движения и получим точку E. Теперь из точки E, как из центра, проведем дугу окружности радиусом, равным скорости движения разведчиков, взятом в том же масштабе, что и скорость колонны. В том месте, где дуга пересечет линию AB, отметим точку D. Направление DE и даст нужный курс: разведчики должны идти по AC параллельно DE.

В точке C, на продолжении BE, можно начинать наблю-

дение. Это и есть та позиция, которая нужна разведчикам. Действительно, колонна в это время будет уже в новом месте — в точке F, и разведчики окажутся относительно нее в нужном для наблюдения положении.

Теперь можно проверить себя, не сделано ли ошибки. Треугольники ABC и DBE подобны. Ведь линия AC построена параллельно DE. А в подобных треугольниках стороны должны быть пропорциональны. Так ли это? Посмотрим.

Должно быть:

$$\frac{AC}{DE}=\frac{BC}{BE}.$$

Подставим все значения. Сообразим, что AC — скорость разведчиков, помноженная на время маневра; $BCFH$ — параллелограмм.

Поэтому $BC=HF$ = скорость колонны, помноженная на время маневра.

Что касается DE и BE, то они взяты равными скоростям разведчиков (DE) и колонны (BE).

Подставим все эти значения в пропорцию и получим:

$$\frac{\text{скорость разведчиков}\times\text{время маневра}}{\text{скорость разведчиков}}=$$
$$=\frac{\text{скорость колонны}\times\text{время маневра}}{\text{скорость колонны}}.$$

Пропорция верна, следовательно, верен и расчет.

Командир наметил путь по компасу, посмотрел на часы и тихо скомандовал: «Вперед!». Маневр начался.

Вскоре разведчики бесшумно пересекли шоссе. Еще несколько осторожных перебежек. Командир попеременно поглядывал то на компас, то на часы, словно колдовал. Несколько раз он останавливался и, прикрыв ладонью глаза, смотрел в сторону солнца. Наконец последовал сигнал: «Мы в позиции. Начать наблюдение».

Когда задание было выполнено и разведчики расположились на отдых перед обратной дорогой, кто-то спросил командира:

— А как вы определили, что мы уже пришли на нужное место? При чем здесь часы, компас и тем более — солнце?

— Это было нетрудно сделать, — сказал командир. —

Я измерил по карте расстояние AB, поделил его на нашу скорость — это и было время маневра. Оставалось только следить за ним по часам. Правда, на всякий случай я проверил себя еще и по солнцу. Направление на него по компасу оказалось таким же, как было установлено заранее.

Целью маневра разведчиков была перемена места, позиции относительно движущегося неприятеля.

Такое маневрирование часто применяется на войне, чтобы создать наилучшие условия для наблюдения за противником или для применения оружия.

Непревзойденными мастерами маневра были великие русские полководцы Суворов и Кутузов, знаменитые флотоводцы Ушаков и Нахимов, полководцы ленинской школы Фрунзе и Чапаев.

Военное маневрирование не утратило своего значения и в наши дни.

Познакомимся с одной современной задачей боевого маневрирования.

АТАКА ПОД ОГНЕМ

Торпедный катер приближался к цели. Огромный, словно гора, авианосец, яростно хрипя залпами автоматических пушек, преграждал ему путь стеной взорванной в пыль воды, окружал белыми столбами разрывов.

Расстояние до цели быстро сокращалось, и все труднее становилось удержать давно готовое сорваться с губ короткое грозное слово.

«Залп!» прозвучало как «Ура!», как вызов огромной, неповоротливой стальной туше, на которую ринулись смертоносные торпеды.

«Упражнение окончено, цель поражена». Эти слова инструктора, произнесенные будничным тоном, показались Игорю Валуеву пришедшими из какого-то другого мира. Мира, в котором вместо авианосца и торпедного катера — макеты, вместо моря — голубой экран учебного прибора, а вместо коварного врага — инструктор Алексей Яковлевич, который совсем не коварен и уж, конечно, не враг.

— Курсант Валуев, доложите ваши расчеты атаки. Только, пожалуйста, без лирики.

Лирикой Алексей Яковлевич называет все, что прямо не относится к стрельбе торпедами.

— Докладывает командир торпедного катера номер тридцать пять курсант Валуев. Выполнял атаку авианосца противника торпедами. Сближение в точку залпа осуществлял полным ходом. Во время атаки авианосец вел массированный огонь по катеру. Придя в точку залпа...

— Товарищ Валуев, не торопитесь. Доложите, как вы рассчитали маневр сближения с авианосцем.

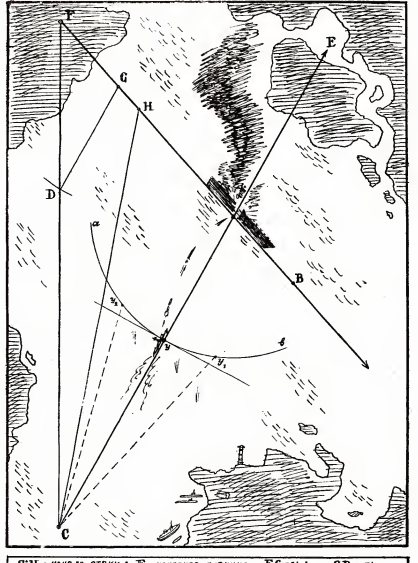
— Атака выполнялась под огнем, поэтому главная цель маневра заключалась в том, чтобы как можно быстрее подойти к авианосцу на расстояние, с которого катер может успешно стрелять. Идея моего решения заключалась в следующем. — Игорь сделал шаг к доске и взял мел. — Начнем решать задачу с конца. В момент залпа катер должен подойти к авианосцу на расстояние, равное дальности залпа торпедами. Обозначим буквой A положение авианосца и буквой y — положение катера в момент залпа. Выйти на дальность залпа катер может из точки C различными курсами. Какой-то один из них самый короткий — его и нужно отыскать. Для этого опишем из точки A дугу ab радиусом, равным дальности стрельбы торпедами. Чтобы произвести залп, катеру нужно оказаться на этой дуге. На дугу ab можно попасть из точки C несколькими курсами, например Cy, Cy_1, Cy_2.

На рисунке ясно видно, что самым коротким из всех возможных курсов будет курс Cy, который направлен прямо в точку A.

Итак, я решил идти самым коротким путем — курсом Cy. Но как его рассчитать? Мы ведь начали задачу с конца. В начальный момент авианосец находился вовсе не в точке A, а в точке H. Если бы нужно было занять какую-нибудь позицию, я сделал бы это без труда: сначала нашел бы позицию условную, а уж потом ту, которая нужна. Как это делать, я знал. И я подумал: а что, если найти и здесь условную позицию? Так я и сделал. Я представил себе, что катер не остановился в точке y, а пошел дальше, в точку A. На путь из точки y в точку A катеру потребуется время T, которое легко рассчитать:

$$T = \frac{\text{дальность стрельбы}}{\text{скорость катера}}.$$

К моменту прихода катера в точку A авианосец успеет прийти в точку B, пройдя расстояние AB за то же время T.



C; H — начало атаки; F — условная позиция $FG = v_A$; $GD = v_K$

$AB = FH = x$ $\quad A_y = A_{y_1} = A_{y_2}$ — дальность стрельбы $\quad$ У — искомая точка залпа

Расстояние AB обозначим для краткости буквой x и сообразим, чему оно будет равно. Видимо:

$$x = \text{скорость авианосца} \times T.$$

Чему равно T, мы уже знаем, поэтому:

$$x = \text{скорость авианосца} \times \frac{\text{дальность стрельбы}}{\text{скорость катера}}.$$

И, наконец, самое важное. Если мы теперь наметим позади начального места авианосца в расстоянии x условную позицию F и станем сближаться с ней вплотную, то в конце маневра катер должен оказаться как раз в точке A, а авианосец — в точке B. Иными словами: таким путем находится нужный курс атаки.

Идя этим курсом в атаку, катер, конечно, не пойдет дальше точки y — в ней он произведет залп по авианосцу. Авианосец же в момент залпа будет, как мы знаем, в точке A.

Итак, коротко порядок расчета.

1. Соединить место катера и авианосца в начале атаки; получим линию CH.

2. Отложить от точки H назад по курсу авианосца расстояние x; получим условную позицию — точку F.

3. Рассчитать сближение с условной позицией вплотную. Для этого вначале отложить от точки F стрелку FG — скорость авианосца по его курсу, а затем из конца стрелки скоростью катера сделать засечку линии CF. Получим точку D.

4. Провести из точки C линию CE, параллельную DG; получим точку A и курс атаки торпедного катера.

5. Отложить от точки A по курсу атаки в направлении на точку C дальность стрельбы торпедами; получим точку залпа y.

Курсант Валуев доклад окончил!

Алексей Яковлевич и все курсанты, не перебивая, слушали Игоря. Когда он окончил, инструктор сказал:

— Расчеты сделаны правильно. Решение верное. И что характерно, это наилучшее решение из всех возможных.

Действительно, как мы помним, Игорь выбрал из многих курсов, ведущих к сближению с целью на дальность залпа, тот единственный курс, который позволил это сделать в кратчайший срок.

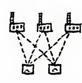
Между тем, как мы помним, в большинстве задач маневрирования полученные решения являются единственно возможными. Найденные нами ранее пути милиции и ракеты, космического корабля и разведчиков не требовали никакого выбора. Других путей, ведущих к решению задачи, просто не существовало.

Рассчитанный Игорем курс получился в результате выбора одного из многих путей. Того, который привел торпедный катер на дальность залпа в самый короткий срок.

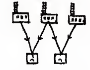
Подобные задачи, связанные с выбором наилучшего плана действий из всех возможных, приходится решать, конечно, не только при боевом маневрировании. Они имеют большое значение для создания наилучших планов перевозок, производства, торговли. Этими задачами, как мы уже знаем, занимается специальный предмет исследования операций — математическое планирование.

Глава 4

ЧУДЕСА РАЗУМНОГО ПЛАНА,



из которой читатель узнает, что правильный выбор маршрута в кинотеатр может помочь лишний раз сходить в кино, подсказать, как построить еще одну школу, и даже выкроить целый автомобиль

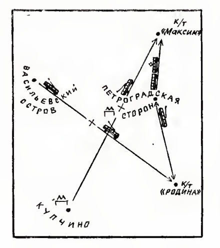


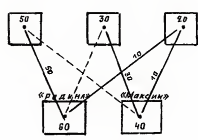
КАК ЕЩЕ РАЗ СХОДИТЬ В КИНО?

Фильм был очень интересный, попасть на него было трудно. Но все-таки школьники сумели раздобыть 100 билетов. Плохо только, что билеты достались в разные кинотеатры: в «Родину» — 60 билетов и в «Максим» — 40.

Кому в какой театр ехать?

Ребята жили в разных районах города: 50 — на Васильевском острове, 30 — в Купчине и 20 — на Петроградской стороне.





Решили так: все 50 василеостровцев поедут в «Родину», все 30 купчинцев — в «Максим», а петроградцев поделили пополам — по 10 человек в каждый кинотеатр.

Посмотрели кино. Фильм понравился.

Казалось бы, что в этой истории необычного?

А между тем, правильно распределить билеты не так просто, как кажется.

Хотя математика существует тысячелетия, освоили такие задачи люди совсем недавно.

Решением подобных задач как раз и занимается математическое планирование. Цель его — составить план так, чтобы результат был наилучшим, а расходы наименьшими.

Первое, что нужно сделать, приступая к составлению плана распределения билетов с помощью математического планирования, — изобразить схему задачи. На схеме сразу видно, сколько ребят живет в каждом из трех районов города, а также сколько было у них билетов в тот и другой кинотеатры. Видно также, как ребята распределили билеты: районы города и кинотеатры соединены прямыми линиями — маршрутами. Цифры на линиях соответствуют числу ребят, поехавших по данному маршруту.

Удачен ли такой план распределения билетов?

Решим вначале, чего же мы от этого плана хотим, какова цель плана. Наверняка кому-то из ребят план нравился, а кому-то нет. У каждого была своя цель: одни хотели поехать поближе, другие — подальше. Кое-кому хотелось в новый кинотеатр «Максим», а кое-кому — в

старый — «Родину». Но всем, конечно, хотелось попасть в кино.

А можно ли придумать такой план, чтобы он подходил для каждого, чтобы все считали его правильным? Оказывается, можно.

Для этого, составляя план, мы должны руководствоваться единой общей целью, например: сократить расходы на дорогу в кинотеатр.

И как мы увидим, окажется, что эти деньги действительно можно было бы здорово сэкономить, если бы ребята догадались правильно спланировать маршруты.

Составим несложную таблицу, из которой мы узнаем, сколько стоит проехать одному человеку в кинотеатр, туда и обратно.

Район города	Кинотеатр	
	«Родина»	«Максим»
Васильевский остров	16 коп.	12 коп.
Купчино	10 коп.	18 коп.
Петроградская сторона	8 коп.	6 коп.

Пользуясь таблицей и зная маршруты культпохода, можно легко подсчитать, во что обошелся всем ребятам проезд. Для этого умножим число ребят, поехавших по каждому маршруту, на стоимость проезда в оба конца, а результаты сложим.

Для маршрута Васильевский остров — «Родина» расходы составят 800 копеек (50 человек $\times$ 16 копеек);

для маршрута Купчино — «Максим» 540 копеек;

для маршрута Петроградская сторона — «Родина» 80 копеек;

для маршрута Петроградская сторона — «Максим» 60 копеек.

Общий расход денег на дорогу получился весьма солидный: $800+540+80+60 = 1480$ копеек $=$ 14 рублей 80 копеек.

А нельзя ли разработать какой-нибудь другой план, при котором все ребята побывают в кино, но проезд обойдется дешевле?

Переберем наудачу несколько различных маршрутов, подсчитаем расходы и выберем план, который мы условно назовем улучшенным.

По этому плану 30 василеостровцев направляются в «Родину» и 20 — в «Максим», все 30 купчинцев — в «Родину», все 20 петроградцев — в «Максим».

Подсчитаем путевые расходы для улучшенного плана:

для маршрута Васильевский остров — «Родина» 480 копеек;

для маршрута Васильевский остров — «Максим» 240 копеек;

для маршрута Купчино — «Родина» 300 копеек;

для маршрута Петроградская сторона — «Максим» 120 копеек.

Общий расход = 480+240+300+120 = 1140 копеек = 11 рублей 40 копеек.

Без всякого труда удалось сэкономить целых 3 рубля 40 копеек — почти четверть всех денег. Сколько еще раз можно сходить на них в кино!

Самое интересное, чтот этот улучшенный план вовсе не обязательно лучший из всех. Возможно, существуют более удачные маршруты, и если их найти, план станет еще лучше, экономнее.

Тут есть над чем поломать голову...

НА ПОМОЩЬ ПРИХОДИТ АЛГЕБРА

Переведем условия нашей задачи на язык алгебры. Для этого обозначим буквой X количество ребят, едущих по какому-нибудь маршруту. Например, Xвр — это число ребят, направляющихся с Васильевского острова в кинотеатр «Родина» (вр — первые буквы начального и конечного пунктов движения).

Теперь условие, которое на обычном языке звучит так: «Из пятидесяти василеостровцев какая-то часть может ехать в «Родину», а какая-то — в «Максим», — на языке алгебры запишется:

$$50 = X_{\text{вр}} + X_{\text{вм}} \qquad (1)$$

То же самое с купчинцами и петроградцами:

$$30 = X\text{кр} + X\text{км} \quad (2)$$

$$20 = X\text{пр} + X\text{пм} \quad (3)$$

А то, что в кинотеатр «Родина» должно приехать всего 60 ребят, а в «Максим» — 40, будет выглядеть так:

$$60 = X\text{вр} + X\text{кр} + X\text{пр} \quad (4)$$

$$40 = X\text{вм} + X\text{км} + X\text{пм} \quad (5)$$

Нужно еще сформулировать математически и намеченную цель планирования: расходы на дорогу должны быть как можно меньше.

Вспомним, как мы подсчитывали расходы на дорогу по первому и улучшенному планам. В общем виде, с применением всех наших икс, это выглядит так:

$$\text{Общий расход} =$$
$$= X\text{вр}\times16 + X\text{кр}\times10 + X\text{пр}\times8 + X\text{вм}\times12 + X\text{км}\times18 + X\text{пм}\times6 =$$
$$= \text{наименьшему возможному} \quad (6)$$

Итак, у нас набралось шесть разных иксов:

Xвр, Xкр, Xпр, Xвм, Xкм, Xпм.

Для удобства расчета давайте выразим их через какие-нибудь два икса, например, через Xкм и Xпм.

Начнем с формулы (2), из которой сразу можно получить:

$$X\text{кр} = 30 - X\text{км}.$$

Из формулы (3):

$$X\text{пр} = 20 - X\text{пм}.$$

Из формулы (4):

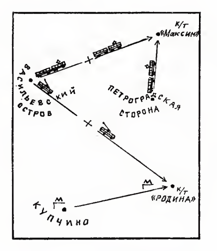
$$X\text{вр} = 60 - X\text{кр} - X\text{пр} = 60 - (30 - X\text{км}) - (20 - X\text{пм}) = 10 + X\text{км} + X\text{пм}.$$

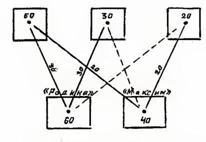
Из формулы (5):

$$X\text{вм} = 40 - X\text{км} = X\text{пм}.$$

Из формулы (6):

$$\text{Общий расход} = (10 + X_{\text{км}} + X_{\text{пм}})\times16 + (30 - X_{\text{км}})\times10 + (20 - X_{\text{пм}}\times8 +$$
$$+ (40 - X_{\text{км}} - X_{\text{пм}})\times12 + X_{\text{км}}\times18 + X_{\text{пм}}\times6 = \text{наименьшему возможному}.$$





Или, после раскрытия скобок и приведения подобных членов:

$$\text{Общий расход} = 1100 + 12 \times X_{\text{км}} + 2 \times X_{\text{пм}} = \text{наименьшему возможному.}$$

Выпишем вместе все значения иксов, которые мы только что получили:

$$\begin{aligned} X_{\text{вр}} &= 10 + X_{\text{км}} + X_{\text{пм}}; \\ X_{\text{кр}} &= 30 - X_{\text{км}}; \\ X_{\text{пр}} &= 20 - X_{\text{пм}}; \\ X_{\text{вм}} &= 40 - X_{\text{км}} - X_{\text{пм}}. \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\text{Общий расход} = 1100 + 12 \times X_{\text{км}} + 2 \times X_{\text{пм}} = \text{наименьшему возможному.}$$

Это и есть наилучший план, выраженный языком алгебры. Он показывает, как должны распределиться ребята по маршрутам, чтобы все попали в кино при наименьших расходах на дорогу.

Переведем теперь этот план на обычный язык.

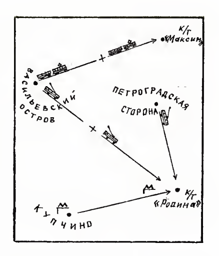
Внимательно посмотрим на формулу общего расхода. Она-то и таит в себе разгадку наилучшего плана. Из этой формулы очевидно, что самым меньшим расход будет тогда, когда $X_{\text{км}}$ и $X_{\text{пм}}$ окажутся равными нулю. Ведь при этом общий расход, как видно из формулы, станет наименьшим из всех возможных — 1100 копеек: 1100 копеек $= 1100 + 12 \times 0 + 2 \times 0$.

Но что означает равенство нулю $X_{\text{км}}$ и $X_{\text{пм}}$?

Буквой X мы обозначали количество ребят, едущих по какому-либо маршруту. Следовательно, то, что $X_{\text{км}}$ и $X_{\text{пм}}$ должны быть равны нулю, означает, что по маршрутам Купчино — «Максим» и Петроградская сторона — «Максим» не должен ехать ни один человек.

Наилучший план начинает проясняться.

А как найти количество ребят, которые должны ехать по всем остальным направлениям?



Теперь это не составит большого труда.

Вернемся к алгебраической записи нашего наилучшего плана — формулам (7) — и подставим в нее уже известные нам значения $X_{км} = 0$ и $X_{пм} = 0$.

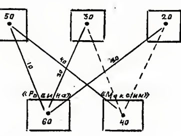
Полминуты расчетов — и перед нами наконец то, что мы так упорно искали, — наилучший план:

$X_{вр}=10+0+0=10$ человек,

$X_{кр}=30-0=30$ человек,

$X_{пр}=20-0=20$ человек,

$X_{вм}=40-0-0=40$ человек.



Составим схему этого плана.

Общий расход, как мы уже знаем, здесь наименьший — 1100 копеек, или 11 рублей.

Это действительно наилучший план. Он дает экономию по сравнению с первым планом на целых 3 рубля 80 копеек. И все это только за счет разумного планирования. Такой план, конечно, одобрили бы все ребята.

История с планом культпохода, конечно же, вымышленная. Да и кому, скажете вы, придет в голову, собираясь идти в кино, составлять планы, думать над решениями... Но время, которое мы потратили на этот рассказ, не пропало зря. Наша история имеет довольно неожиданное продолжение.

На этот раз будем говорить о вещах достаточно серьезных.

Вспомним задачу о перевозках руды из рассказа «Пути, которые мы выбираем».

Коротко повторим условие задачи, приведя на этот раз и некоторые необходимые цифры.

Руда добывается на трех шахтах и по железной дороге доставляется на два металлургических комбината. Требуется спланировать перевозки руды наилучшим, наиболее экономным образом. Количество руды, которое дает каждая шахта, а также стоимость перевозки по разным направлениям разные.

Впрочем, это проще всего показать на схеме. Здесь наглядно видно, сколько руды в год добывают на каждой из трех шахт. Стоимости перевозок руды по разным маршрутам показаны в следующей табличке.

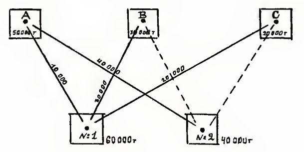
Шахты	Металлургические комбинаты	
	№ 1	№ 2
A	16	12
B	10	18
C	8	6

Не напоминают ли вам что-нибудь эти цифры?

Напоминают. Ведь они в точности совпадают с теми, которыми мы пользовались, планируя поездку в кино. Но дело не только в цифрах. Основная цель при составлении плана перевозок руды — та же, что и плана поездок ребят: добиться наименьших расходов. И значит, если перевозить руду по наилучшему плану, который мы рассчитали для поездки в кино, то и здесь будет достигнута экономия. С той только разницей, что тут счет пойдет не на рубли и копейки, а на... Впрочем, давайте подсчитаем.

Если вести планирование перевозок руды без расчета, на глазок, то может пройти план, подобный первому плану поездки ребят. Как мы помним, сумма расходов на перевозку ста ребят там составила 14 рублей 80 копеек.

A
C
№1
№2
B


A
50000 т
B
30000 т
C
20000 т
10 000
40 000
30 000
20 000
№1
60 000т
№2
40 000т

Поскольку мы теперь рассчитываем план перевозки ста тысяч тонн руды, то вместо одного школьника будет доставляться одна тысяча тонн руды. А стоимость перевозки тонны груза требует в сто раз больше затрат, чем перевозка одного человека. Следовательно, общая сумма расходов окажется в сто тысяч раз больше, чем при культпоходе — 1 480 000 рублей.

Но мы уже знаем, что этот первый план перевозки был далеко не лучшим. И конечно, перевезем руду по наилучшему плану. Сумма расходов по этому плану примерно на четверть меньше, чем по первому, и составила 11 рублей 00 копеек. При перевозках же руды появится цифра совсем другого калибра: 1 100 000 рублей. Экономия денег составит:

1 480 000—1 100 000 = 380 000 рублей.

На эти деньги можно построить хорошую школу. А ведь шахт и металлургических комбинатов с подобными перевозками в нашей стране очень много.

И заметьте, все это было сделано без всякого увеличения добычи руды, только за счет составления умного плана.

Разве это не похоже на чудеса?

КАК ВЫКРОИТЬ ЛИШНИЙ АВТОМОБИЛЬ?

Познакомимся с еще одним «чудом» математического планирования.

Знаете ли вы, что создание современного корабля, самолета, автомобиля включает, как и изготовление обычного костюма или пальто, раскрой материала?

Из больших металлических листов выкраиваются заготовки для деталей кузова автомобиля, крыльев и фюзеляжа самолета, корпуса корабля. Затем эти заготовки отправляются под мощный пресс, который штампует из них необходимые детали.

На этот раз нам предстоит раскроить партию тонких металлических листов размером 6×13 метров каждый. Требуется из каждого листа получить по нескольку заготовок двух размеров: заготовка A — 5×4 метра, заготовка B — 2×3 метра.

Каким же способом лучше всего вести раскрой?

Вначале сообразим, как эти заготовки могут располагаться на большом листе. Попробуем несколько возможных способов раскроя.

Прежде всего позаботимся о том, чтобы получить из одного листа как можно больше заготовок A — они крупнее, чем заготовки B и для них поэтому труднее подыскать место на листе. Оказывается, однако, что больше трех заготовок A из листа выкроить невозможно.

Далее попробуем производить раскрой так, чтобы на листе получилось по две заготовки A, и, наконец, по одной.

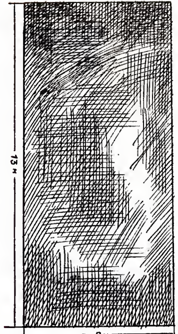
Каждому из этих способов раскроя присвоим свой номер:

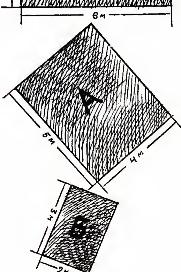
способ № 1:
3 заготовки $A+1$ заготовка B;

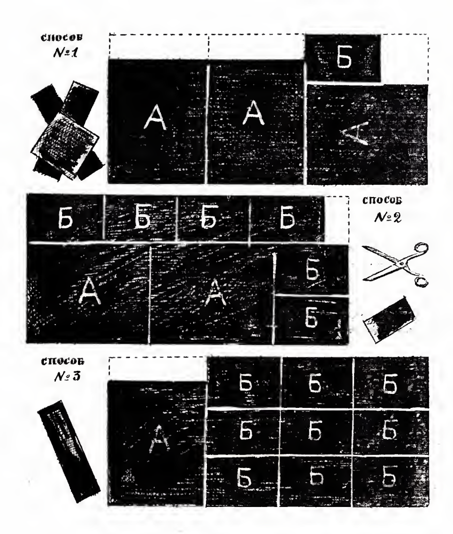
способ № 2:
2 заготовки $A+6$ заготовок B;

способ № 3:
1 заготовка $A+9$ заготовок B.

При всех способах раскроя часть площади листа остается неиспользованной и идет в отходы. На рисунке эта площадь заштрихована. Конечно, нужно стремиться, чтобы таких отходов было поменьше. Для удобства работы раскрой листов произ-







водится обычно не на каждую машину в отдельности, а сразу на целую партию.

Если не учитывать потребность в заготовках определенного типа, то может получиться, что какой-то одной из них окажется слишком много, а другой будет не хватать.

В нашем случае потребовалось: 300 заготовок A и 1500 заготовок B.

Задача состоит в том, чтобы выбрать для этого количества заготовок наилучший, наиболее экономный план раскроя, при котором заготовок будет как можно больше, а отходов — как можно меньше.

На этот раз обратимся за помощью к геометрии.

На обычном графике будем откладывать по оси x число заготовок A, а по оси y — число заготовок B. Тогда каждому сочетанию заготовок A и B на графике будет соответствовать определенная точка, обозначающая способ раскроя.

Например, 3 заготовки A и 1 заготовка B дают точку «способ № 1»; 2 заготовки A и 6 заготовок B дают точку «способ № 2» и так далее.

Соединяя эти точки между собой, можно получить линии, соответствующие сочетанию различных способов раскроя.

Так, линия, соединяющая способы № 2 и № 3, означает, что при раскрое пользуются обоими этими способами.

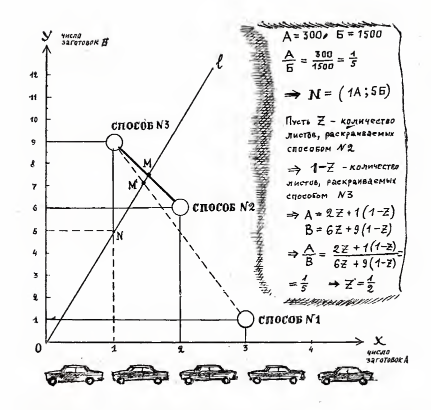
На этом же графике нам нужно показать, что на 300 заготовок A требуется выкроить 1500 заготовок B. Но это означает, что на каждую заготовку A должно приходиться пять заготовок B:

$$\frac{A}{B} = \frac{300}{1500} = \frac{1}{5}.$$

Проведем на графике луч OL, так, чтобы он проходил через точку N — (1 заготовка A, 5 заготовок B). Такой луч на всем своем протяжении будет соответствовать нужному соотношению заготовок $^1/_5$. И, видимо, наш план должен лежать где-то на этом луче. Но где же?

Нетрудно сообразить, что точка, соответствующая наилучшему плану, должна лежать одновременно и на луче OL и на одной из линий, дающих сочетание способов раскроя. При выборе линии способов раскроя следует иметь в виду, что чем дальше она будет отстоять по лучу OL от точки начала координат O, тем больше будет сделано заготовок, а значит, и тем лучше будет план. Это ясно из рисунка.

На графике хорошо видно, что этой, столь необходимой точкой может быть только точка M, лежащая на линии «способ № 2 — способ № 3». Действительно, она, с одной стороны, дает нам требуемое число заготовок (на одну



заготовку A пять заготовок B), а с другой — это наиболее удаленная от начала координат точка сочетания этих способов раскроя.

Для того чтобы в этом убедиться, попробуем воспользоваться каким-нибудь другим возможным сочетанием способов раскроя, например, № 1 и № 3: ведь соединяющая их пунктирная линия тоже пересекает луч OL. Однако при этом план становится явно хуже, так как точка пересечения M' расположена ближе к началу координат, чем точка M, и заготовок поэтому получится меньше.

Итак, мы пришли к выводу, что наилучший план раскроя должен представлять собой сочетание способов раскроя № 2 и № 3.

Рассчитаем, в каком соотношении нужно применять эти

способы. Для этого обозначим буквой Z долю листов, которые будут раскраиваться по способу № 2. На долю способа № 3 тогда, понятно, придет $1-Z$ листов. При этом общее число заготовок A и B, получаемое способами № 2 и № 3, как видно из существа этих способов, равно:

$$\text{число заготовок } A = 2\times Z + 1\times(1-Z),$$
$$\text{число заготовок } B = 6\times Z + 9\times(1-Z).$$

Теперь составим отношение числа заготовок A к числу заготовок B:

$$\frac{\text{число заготовок } A}{\text{число заготовок } B} = \frac{2\times Z+1\times(1-Z)}{6\times Z+9\times(1-Z)} = \frac{300}{1500} = \frac{1}{5}.$$

Преобразуем полученную пропорцию, с тем чтобы найти, чему равно Z:

$$[2\times Z+1\times(1-Z)]\times 5 = [6\times Z+9\times(1-Z)]\times 1;$$
$$10Z+5-5Z=6Z+9-9Z;$$
$$10Z-5Z-6Z+9Z=9-5;$$
$$8Z=4;$$
$$Z=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, мы должны половину всех листов кроить по способу № 2, а половину — по способу № 3. Это, кстати, видно и на нашем графике. Ведь луч OL проходит как раз посредине между точками «способ № 2» и «способ № 3».

Теперь сообразим, сколько же нужно иметь всего листов, чтобы получить требуемое количество заготовок: 300—A и 1500—B.

Посмотрим на схемы раскроя № 2 и № 3, которыми мы решили пользоваться поровну. Если взять два листа и один раскроить по способу № 2, а второй — по способу № 3, то получится 3 заготовки A и 15 заготовок B. Нам же, как известно, нужно ровно в сто раз больше заготовок каждого типа. Значит, общее необходимое количество листов будет: $2\times 100=200$ листов.

Отсюда ясно и как будет выглядеть наилучший план раскроя. Вот он.

Половина листов раскраивается по способу № 2. Получается: $100\times 2 = 200$ заготовок A, $100\times 6 = 600$ заготовок B.

Вторая половина листов раскраивается по способу № 3. Получается: $100 \times 1 = 100$ заготовок A, $100 \times 9 = 900$ заготовок B.

Всего же раскраивается 200 листов. Из них получается 300 заготовок A и 1500 заготовок B, что и требовалось по заданию. А чем же этот план лучше других?

На этот случай у нас есть такой любопытный ответ.

Предположим, что заводские инженеры не знали современных методов раскроя и произвели его без расчета, «на глаз». При этом они остановились на плане раскроя тех же двухсот листов способами № 1 и № 3.

Для того чтобы количество заготовок A оставалось равным 300, способом № 1 раскраивалось 50 листов, а способом № 3 — 150 листов.

И вот что получилось.

50 листов, раскроенных по способу № 1, дали:

$50 \times 3 = 150$ заготовок A, $50 \times 1 = 50$ заготовок B.

150 листов, раскроенных по способу № 3, дали:

$150 \times 1 = 150$ заготовок A, $150 \times 9 = 1350$ заготовок B.

Всего же раскраивается 200 листов. Из них получается 300 заготовок A и 1400 заготовок B.

А куда же девалось 100 заготовок B? Ведь в нашем наилучшем плане их было 1500.

Их «съел» плохой план. Все они ушли в отходы. Материал оказался неиспользованным.

Таким образом, правильное планирование раскроя даже в такой скромной задаче, как наша (разрезается всего 200 листов), экономит целых 600 квадратных метров этого ценного материала.

100 заготовок $B \times 2$ метра $\times 3$ метра $=$ 600 квадратных метров.

Теперь можно ответить и на вопрос: как выкроить лишний автомобиль? Для этого нужно вести раскрой металла с умом, по правилам науки, используя для сложных расчетов электронно-вычислительные машины.

Кстати, кроить приходится не только металлические листы.

Умный план раскроя необходим и там, где шьют одежду и обувь, режут бумагу для книг и тетрадей, вырезают стекла и зеркала.

И всюду этот план выкраивает что-нибудь очень нужное людям.

* * *

Выбор наилучшего плана перевозок или раскроя, так же как и нахождение верного курса маневра, имеют ту хорошую особенность, что всегда приводят к вполне определенному результату. И результат этот можно заранее точно предсказать. Сколько раз ни планируй перевозку руды — в одинаковых условиях план будет один и тот же. Сколько ни расчитывай курс атаки ракетного катера — для неизменной обстановки он будет одинаков.

В жизни, вместе с тем, довольно часто встречаются задачи, при решении которых результат заранее точно предсказать невозможно: от раза к разу исход может неожиданно меняться по воле случая. Шарик Тома Сойера катится по-разному.

Каким должно быть при этом решение?

Передаем слово теории вероятностей.

Глава 5

АРИФМЕТИКА СЛУЧАЙНОСТЕЙ,



в которой выясняется, почему бутерброд падает маслом вниз; взвешивается случай; происходит несколько полезных встреч со случайными событиями, а также дается ответ на вопрос «в какой руке?»



ПОЧЕМУ БУТЕРБРОД ПАДАЕТ МАСЛОМ ВНИЗ?

Однажды в детстве я уронил бутерброд.

Глядя, как я виновато вытираю масляное пятно, оставшееся на полу, старший брат успокоил меня:

— Не горюй, это сработал закон бутерброда.

— Что еще за закон такой? — спросил я.

— Закон, который гласит: «Бутерброд всегда падает маслом вниз». Впрочем, это шутка, — продолжал брат. —

Никакого такого закона нет. Просто бутерброд действительно ведет себя довольно странно: большей частью масло оказывается внизу.

— Давай-ка еще пару раз уроним бутерброд, проверим, — предложил я. — Все равно ведь его придется выбрасывать.

Проверили. Из десяти раз восемь бутерброд упал маслом вниз.

И тут я задумался: а можно ли заранее узнать, как сейчас упадет бутерброд, маслом вниз или вверх?

Наши опыты прервала мать...

А с бутербродом дело, оказывается, обстоит так. Масло немного тяжелее, чем хлеб, и поэтому чаще оказывается внизу. Иногда правда, бывает наоборот. Но вот заранее сказать, как сейчас, в этот раз, упадет бутерброд, нельзя. Он никогда не открывает своей тайны. Таинственное поведение, не правда ли? Давайте попытаемся его разгадать.

В окружающем нас мире существует множество явлений, которые каждый раз происходят несколько по-иному и всегда приводят к неожиданному результату. Эти явления называют случайными. Случай играет не последнюю роль в жизни человека. Поэтому люди уже давно по достоинству оценили роль случайностей.

Издавна существует выражение «Его Величество Случай». От случая во многом зависит погода, урожай зерна и плодов, брак на производстве, попадание в цель и, уж конечно, всем известное «повезет — не повезет».

Уяснив роль случая в своей жизни, люди тут же принялись его изучать. Оказалось, что случай, несмотря на всю его своенравность, все же не забывает о дисциплине, подчиняется своим, вполне определенным законам.

Том Сойер не зря был уверен, что шарик найдет шарик. Наверняка ему и его друзьям не раз приходилось поступать подобным образом, и они заметили, что почти всегда при нескольких бросках потеря обнаруживается. Иногда это бывало при втором, третьем или четвертом броске, порой удавалось добиться успеха сразу, с первой же попытки.

В этом любопытном явлении нельзя было не усмотреть определенное правило: в одном из нескольких случаев шарик обязательно находился.

А там, где есть правило, закономерность, есть место науке.

Наука о случайных явлениях — теория вероятностей. С ее помощью человек стал не только понимать случайное, но и управлять им.

Знакомство с теорией вероятностей начнем с простой арифметической задачи.

Школьники заработали в совхозе 100 килограммов яблок. Яблоки привезли в школу, чтобы раздать ребятам. 75 процентов привезенных яблок оказались сладкими. Остальные — кислыми.

Необходимо узнать, сколько было яблок сладких и сколько кислых.

Решение задачи не составляет большого труда. Для этого понадобятся всего два вопроса.

1. Сколько яблок было сладких?

$$100 \times \frac{75}{100} = 75 \text{ кг.}$$

2. Сколько яблок было кислых?

$$100 - 75 = 25 \text{ кг.}$$

Кажется, все здесь понятно.

А вот попробуйте ответить на такой вопрос: «Сладким или кислым будет любое, взятое наугад, яблоко из привезенных в школу?».

На такой вопрос арифметика не отвечает.

Дело в том, что это вопрос уже не к арифметике, а к теории вероятностей. В нашу историю с яблоками вмешался Случай.

Ведь мы берем любое яблоко наугад, и поэтому никто не может заранее точно сказать, каким оно будет на вкус. Вспомним про бутерброд.

— Значит, на наш вопрос нет ответа? — разочарованно спросит читатель.

Есть, но только ответ необычный, не такой, какие бывают в арифметике.

Представим себе, что каждому школьнику досталось по 10 яблок. Поскольку сладкие яблоки составляют 75%, то, значит, из полученных 10 яблок 7,5 должны быть сладкими и 2,5 — кислыми. Но ведь не бывает же яблок, одна половинка которых сладкая, а другая — нет. Видимо, кому-то из ребят достанется по 8 сладких яблок и по 2 кислых, а кому-то по 7 сладких и по 3 кислых. Кому особенно не

повезет, получит 6 сладких и 4 кислых, но будут и отдельные счастливчики, которые съедят 9 сладких яблок.

Если теперь сложить все яблоки одной какой-нибудь группы ребят вместе, то это будет выглядеть примерно так:

Коля:	8 сладких	+	2 кислых	=	10 яблок;
Толя:	7 сладких	+	3 кислых	=	10 яблок;
Маня:	7 сладких	+	3 кислых	=	10 яблок;
Таня:	9 сладких	+	1 кислое	=	10 яблок;
Федя:	7 сладких	+	3 кислых	=	10 яблок;
Петя:	7 сладких	+	3 кислых	=	10 яблок;
Оля:	6 сладких	+	4 кислых	=	10 яблок;
Поля:	8 сладких	+	2 кислых	=	10 яблок;
Женя:	8 сладких	+	2 кислых	=	10 яблок;
Сеня:	8 сладких	+	2 кислых	=	10 яблок.
Всего у 10 ребят:	75 сладких	+	25 кислых	=	100 яблок.

В общем, получается, что в среднем на каждые 4 яблока приходится 3 сладких и 1 кислое.

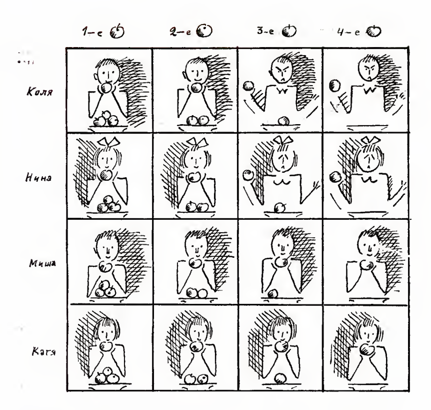
Теперь мы можем сказать, какого вкуса будет любое, взятое наугад яблоко. Для нашей задачи любое яблоко в трех случаях из четырех в среднем должно быть сладким.

Это и есть ответ теории вероятностей на наш вопрос. Смысл его в том, что сколько бы этих яблок вы, или Коля, или Толя, или любой другой ни брал наугад, в среднем на четыре яблока три придется сладких. Если же вы взяли только одно яблоко, то $\frac{3}{4}$ всех возможностей, или, как говорят, шансов, за то, что оно будет сладким. Это число, характеризующее возможность появления интересующего нас случайного события, называется *вероятностью*.

Подобным же образом отвечает теория вероятностей и на вопрос о том, какой стороной вниз упадет бутерброд. Как мы помним, он падал маслом вниз 8 раз из 10. Если при большем количестве падений это соотношение не изменится, то можно сказать: $\frac{8}{10}$ всех шансов за то, что бутерброд, если его уронить, упадет маслом вниз.

— Так это почти как в арифметике, — заметит читатель.

Действительно, в этой науке поначалу много общего с арифметикой. Числа складываются и умножаются, вычи-



таются и делятся. Но только это особая арифметика — арифметика случайностей.

Обычная арифметика решает такие задачи, в которых результат от случая к случаю не меняется и его поэтому можно точно рассчитать.

Арифметика случайностей имеет дело с задачами, для которых определенного, точного ответа на каждый случай не существует. Если даже собрать всех лучших математиков мира, то и они не смогут точно сказать, как сейчас упадет бутерброд.

Ответы теории вероятностей верны лишь в среднем для большого числа одинаковых случайных событий. Именно это мы и имеем в виду, когда говорим, что вероятность по-

лучить сладкое яблоко равна $\frac{3}{4}$. И чем больше событий, тем ответ вернее. В теории вероятностей это называется законом больших чисел.

Так, если в нашей задаче попробовать наугад яблоки у кого-нибудь одного из ребят, то, как мы видим, совсем не обязательно, что $\frac{3}{4}$ из них сладкие: их может быть и больше и меньше. А вот если спросить, какой был вкус яблок у всех ребят, наверняка окажется, что сладкими оказалось ровно $\frac{3}{4}$ всех яблок. Вероятность при этом срабатывает очень точно — не хуже, чем в обычной арифметике.

Благодаря закону больших чисел теория вероятностей оказывается незаменимой, когда приходится иметь дело с многократно повторяющимися явлениями. Она нужна при составлении прогноза погоды, для предсказания возможного производственного брака, при планировании массового производства одежды и обуви и т. п.

Прежде чем заняться решением всех этих новых для нас задач, необходимо научиться обращению со случайностями.

Первое, что мы сделаем, это попробуем измерить случай.

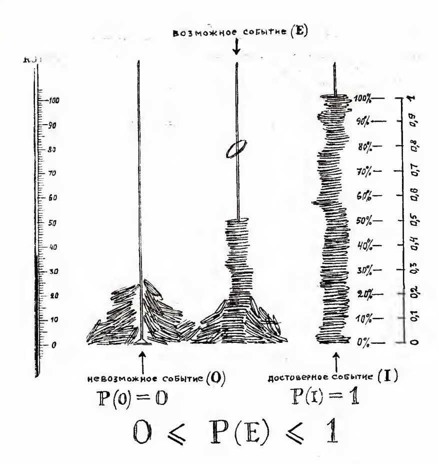
СКОЛЬКО ВЕСИТ СЛУЧАЙ?

Представим себе, что в нашей задаче сладких яблок было не 75, а 90 процентов. Это означает, что теперь любое, взятое наугад яблоко уже в девяти случаях из десяти будет вкусным и лишь в одном — невкусным. На наших глазах вероятность заметно изменилась — стала больше.

А что означает большáя или малая вероятность?

Видимо, раз вероятность большáя, то можно ожидать, что случайное событие произойдет почти наверняка. Так, когда сладких яблок стало 90 процентов, почти любое наугад взятое яблоко должно оказаться вкусным. Маленькая же вероятность говорит о том, что здесь на случайность надеяться не стоит. В нашем примере есть лишь один шанс из десяти на то, что яблоко окажется кислым. Ясно, что такой случай маловероятен и поэтому, скорее всего, не произойдет. Так что смело берите любое яблоко и ешьте на здоровье.

Итак, вероятность меняется: в одних случаях бывает



большой, в других маленькой. Как же узнают величину вероятности? Оказывается, довольно просто, примерно так же, как мы узнаем, какого роста человек или сколько он весит, — для этого нужно измерить его высоту или вес.

А разве можно взвесить случай?

Как-то мне понадобилось купить материал на костюм. В магазине продавщица быстро отмотала от большого рулона полосу ткани и несколько раз приложила к ней метр. Отрез был готов.

Длина отреза была измерена просто: ее сравнили с за-

ранее известным размером одного метра: сколько раз метр лег на ткань, столько и было в ней метров длины.

Таким же путем можно взвесить любой груз. Только тут вместо метра идут в ход гири: сколько килограммов гирь уравновесят груз, столько килограммов он и весит.

Какими же гирями, каким метром измерить случай? С чем сравнить вероятность случайного события?

Разобраться в этом нам поможет простой градусник.

Когда-то люди не умели измерять температуры. Изобретатель градусника придумал, как это сделать. Он опустил трубочку со ртутью в тающий лед и там, где остановился столбик ртути, отметил 0 градусов. Потом перенес трубочку в кипящую воду и сделал отметку в высшей точке, до которой ртуть поднялась, — 100 градусов.

Расстояние между 0 и 100 градусами разделил на 100 равных частей — каждая часть составила 1 градус. Так появился термометр.

Теперь измерить любую температуру стало очень просто: на каком делении остановился ртутный столбик, столько и градусов. Попробуем изобрести похожий градусник для измерения возможностей случая — вероятностей.

И дети и взрослые любят играть в такую игру. В землю вбивается колышек. Каждый из играющих отходит от колышка на некоторое расстояние и старается набросить на него небольшое кольцо. Броски повторяются по нескольку раз. Выигрывает тот, кто сумеет набросить больше колец.

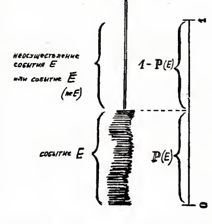
Попадешь или не попадешь кольцом на колышек при каждом броске — дело случая. Эта возможность появления случайного события и есть его вероятность. Ее-то мы и будем измерять.

Вначале отойдем от колышка подальше, так, чтобы любой, кто бы ни стал бросать кольца, наверняка «промазал». И даже если сделает 100 бросков, результат был бы тот же — все мимо. Значит, попадание, которого мы ждем, в этом случае невозможно.

Вероятность такого невозможного случайного события, конечно, равна нулю.

Соорудим «градусник» для измерения вероятностей. Он показан на нашем рисунке. Вероятность невозможного случайного события обозначим на этом «градуснике» так же, как температуру тающего льда на настоящем термометре — нулем.

Затем продолжим игру. Подойдем к колышку вплотную. Любой человек, даже малый ребенок, сможет с такого расстояния 100 раз подряд без труда надеть кольцо на колышек.



Это означает, что нужный нам случай — кольцо оказалось на колышке — возможен всегда, или, как говорят, достоверен. Вероятность такого достоверного случайного события обозначим на нашем «градуснике» цифрой 100.

Если мы теперь разделим расстояние от 0 до 100 на нашем «термометре» на сто равных частей, то получим возможность измерить любую вероятность. Но сначала вспомним, как измеряют температуру. Возьмем в руки обычный медицинский термометр и сунем его под мышку. Столбик ртути остановится там, где стоит цифра 36,6. И мы говорим, что температура тела равна 36,6 градуса. Градус — единица измерения температуры, так же, как метр — длины или килограмм — веса.

А какой же единицей мерить вероятность?

Отойдем от колышка на такое расстояние, чтобы в среднем половина всех наших колец попадала в цель. Для разных людей это будут, конечно, разные расстояния. Если мы, как и раньше, сделаем 100 бросков, то на колышке кольца побывают 50 раз, что составит половину всех случаев. Соответствующую вероятность мы и обозначим, как половину — 0,5, или 50 процентов. На нашем «градуснике» это будет соответствовать температуре 50°.

Если с более далекого расстояния на колышек попадет из 100 колец 30 — вероятность 0,3, или 30 процентов, — как бы температура 30°.

Вспомним бутерброд. Вероятность того, что он шлепнется маслом вниз, теперь можно сказать, равна 0,8, или 80 процентам. Столь большая «температура» — вероятность — и создает бутерброду плохую репутацию. Поэтому и говорят, что «бутерброд падает маслом вниз».

Сообразим, как мы получили числовые значения вероятностей на нашем «градуснике». Во всех примерах число интересующих нас удачных бросков делилось на число всех бросков.

Принято говорить, что удачные броски — это случаи, благоприятствующие интересующему нас событию, а все броски — равновозможные случаи. Равновозможные — потому, что при данном расстоянии все кольца обладают одинаковыми возможностями побывать на колышке. Итак:

$$\text{вероятность} = \frac{\text{число благоприятствующих случаев}}{\text{общее число равновозможных случаев}}.$$

Это и есть формула вероятности.

А как определить вероятность того, что интересующее нас событие не произойдет, например, «мы не набросим кольцо на колышек» или «бутерброд не упадет маслом вниз», а упадет маслом вверх?

Такой расчет выполнить теперь совсем не трудно. Просто надо отнять вычисленную по формуле вероятность от единицы или от 100 процентов. Ведь на нашем «градуснике» всего 100 делений. Получается, что если мы попадем кольцом с вероятностью 0,3, то вероятность промаха будет 1—0,3=0,7, или 100 процентов — 30 процентов = 70 процентов. А вероятность нарушить «закон бутерброда» равна 1—0,8=0,2, или 20 процентам. Вероятность, конечно, не может быть, подобно температуре, меньше, чем 0, — ведь уже при 0 ничего не происходит — никакое событие невозможно. Не может она быть и больше 1; уже при 1 интересующее нас событие происходит наверняка, а значит, неслучайно.

Вооружившись нашим «термометром», отправимся на поиски случайных событий. Мы научились их измерять, и нам, конечно, любопытно узнать обо всем, что может произойти по воле случая.

ВСТРЕЧИ СО СЛУЧАЕМ

Первая встреча: случай в цехе.

На одном из заводов несколько лет назад начали делать телевизоры. Телевизор — сложный прибор, поэтому вначале на заводе было много брака: в среднем из каждых двадца-

ти телевизоров один вскоре после покупки оказывался неисправным. Покупатели приуныли. Но прошел месяц, другой, и работа на заводе наладилась. Возможность брака уменьшилась в пять раз. Как вы думаете, можно ли теперь спокойно покупать телевизор, сделанный на этом заводе? Призовем на помощь формулу вероятности.

$$\text{Вероятность брака в начале производства} = \frac{\text{число неисправных телевизоров}}{\text{число всех телевизоров}} = \frac{1}{20} = 0{,}05, \text{ или } 5\%.$$

А теперь уменьшим вероятность в 5 раз:

$$5\% : 5 = 1\%.$$

Посмотрим на наш «градусник». 1% — это очень маленькая вероятность. Ей так же далеко до вероятности 100%, при которой брак достоверен, как воде с температурой 1 градус до кипения. Поэтому можно считать, что, скорее всего, купленный телевизор окажется без брака.

Вторая встреча: случай в колхозе.

В колхозе готовились к уборке урожая. В прошлые годы уборка занимала 10 дней. На этот раз бюро прогнозов предсказало, что из намеченных для уборки десяти определенных дней в конце лета три дня (какие — неизвестно) будут с дождем.

Если дождь будет идти три дня подряд, он может сорвать уборку, — значит, необходимо принять меры, чтобы сохранить урожай.

А может быть, дождь не будет идти три дня подряд, а пойдет, скажем, в первый, третий и седьмой дни десятидневки и не помешает уборке?

Все это во власти случая. Без арифметики случайностей здесь просто не обойтись.

Для того чтобы к нашей задаче применить формулу вероятности, необходимо определить как общее число равновозможных случаев (знаменатель формулы вероятности), так и число благоприятствующих случаев (числитель формулы).

Общее число равновозможных случаев здесь, видимо, количество вариантов погоды, при которых дождь идет три любых дня из десяти. Например 1, 2, 3 или 1, 6, 10, или 1, 3, 7 и так далее.

Сколько может быть таких вариантов? Не торопитесь

отвечать. Ответ получить не так-то просто. Давайте сначала потренируемся в определении количества вариантов погоды с дождем по два дня из десяти. Это удобно сделать с помощью следующей таблицы.

ЧИСЛО ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ ПОГОДЫ, ПРИ КОТОРЫХ ДОЖДЬ ИДЕТ ПО ДВА ЛЮБЫХ ДНЯ ИЗ ДЕСЯТИ

Номера дней	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**1,10**
2	2,1	**2,2**	**2,3**	**2,4**	**2,5**	**2,6**	**2,7**	**2,8**	**2,9**	**2,10**
3	3,1	3,2	**3,3**	**3,4**	**3,5**	**3,6**	**3,7**	**3,8**	**3,9**	**3,10**
4	4,1	4,2	4,3	**4,4**	**4,5**	**4,6**	**4,7**	**4,8**	**4,9**	**4,10**
5	5,1	5,2	5,3	5,4	**5,5**	**5,6**	**5,7**	**5,8**	**5,9**	**5,10**
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	**6,6**	**6,7**	**6,8**	**6,9**	**6,10**
7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	**7,7**	**7,8**	**7,9**	**7,10**
8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	**8,8**	**8,9**	**8,10**
9	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	**9,9**	**9,10**
10	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	**10,10**

На пересечении каких-нибудь двух дней получаем один вариант, или случай. Например, 1-й и 2-й дни дают на пересечении 1, 2. Это означает, что может быть случай, когда дождь идет 1-й и 2-й дни десятидневки.

Всего, оказывается, можно выбрать таких $10 \times 10 = 100$ вариантов. Правда, не все они нам подходят. Те 10 случаев, которые оказались на диагонали таблицы, мы можем отбросить — ведь это одни и те же два дня. Остается $100 - 10 = 90$ вариантов.

Кроме того, если внимательно присмотреться к таблице, можно заметить, что сверху и снизу от диагонали каждый вариант имеет своего двойника. Например, варианту 1, 3 соответствует 3, 1. А ведь это одно и то же, так как порядок дней не имеет для нас значения.

Значит, остается половина:

$90 : 2 = 45$ вариантов.

Теперь уже нетрудно рассчитать, сколько может быть вариантов, при которых дождь идет три любых дня из десяти. Для этого нужно к каждому из полученных 45 вариантов по два дня приписать еще по одному дню. Например, у нас был вариант 1, 2. К нему можно приписать любой день от третьего до десятого — 1-й и 2-й дни у нас уже есть. Всего из случая 1,2 получится восемь различных случаев: 1,2,3; 1,2,4; 1,2,5; 1,2,6; 1,2,7; 1,2,8; 1,2,9; 1,2,10. И так к каждому из 45 вариантов.

А всего будет $45 \times 8 = 360$ вариантов.

Это число придется поделить на 3, ибо каждый случай здесь записан трижды. Например, записано 1,2,3; 1,3,2; 2,3,1. Все это один и тот же случай. Поэтому число различных вариантов будет в три раза меньше:

$$360 : 3 = 120 \text{ вариантов.}$$

Это и есть знаменатель формулы вероятности — общее число равновозможных случаев, при которых дождь идет три любых дня из десяти.

Теперь найдем числитель формулы вероятности — благоприятствующие случаи, когда дождь может идти в пределах десяти дней три дня подряд. Вот эти случаи: 1,2,3; 2,3,4; 3,4,5; 4,5,6; 5,6,7; 6,7,8; 7,8,9; 8,9,10.

Всего 8 вариантов.

По формуле вероятности сосчитаем:

$$\text{вероятность} = \frac{8}{120} = \text{примерно } 0{,}07, \text{ или } 7\%.$$

Вряд ли кто-нибудь мог без расчета догадаться, что вероятность угрозы урожаю колхоза так мала. Ведь это значит, что мы сможем провести уборку без потерь с вероятностью, равной:

$$1 - 0{,}07 = 0{,}93, \text{ или } 93\%.$$

Можно сказать — почти наверняка. За урожай можно не опасаться.

Третья встреча: случай на птицефабрике.

Ребята приехали с экскурсией на птицефабрику. Всем хотелось посмотреть, как из яиц вылупляются маленькие цыплята. Кто-то из ребят поинтересовался, можно ли заранее узнать, сколько сегодня появится курочек и сколько петушков.

Женщина в белом халате — зоотехник — сказала:

— Мы такие расчеты делаем каждый день. Ведь от этого зависит, сколько мы получим продукции: яиц и мяса. Давайте сейчас посчитаем вместе.

В этом инкубаторе находится 1500 яиц. В среднем курочек рождается 51%, а петушков — 49%. Надо еще учесть, что примерно 5% яиц не наклевывается вовсе.

Определим, сколько же появится курочек и сколько петушков.

Вначале узнаем, сколько всего цыплят появится на свет. Для этого надо из общего количества яиц вычесть 5% — те, которые не наклюнутся.

Найдем 5% от 1500:

$$\frac{1500}{100} \times 5 = 75 \text{ яиц.}$$

Можно написать и иначе:

$$1500 \times 0{,}05 = 75 \text{ яиц.}$$

Значит, на свет появится 1500 — 75 = 1425 цыплят. Из них в среднем будет:

$$1425 \times 0{,}51 = 725 \text{ курочек.}$$
$$1425 \times 0{,}49 = 698 \text{ петушков.}$$

Вот и всё.

На птицефабрике мы увидели случай в новой одежке.

В цехе или в колхозе речь шла о том, как найти интересующую нас вероятность, зная общее число случаев.

А вот зоотехник рассказала ребятам, как, наоборот, рассчитать число интересующих нас случаев — количество курочек и петушков, когда вероятность их появления уже известна. Это число называют математическим ожиданием — оно показывает среднее значение случайной величины.

В решенной нами только что задаче математическое ожидание, или, сокращенно, по первым буквам, *МО*, — это произведение числа всех возможных случаев на вероятность тех из них, которые нас интересуют. Нетрудно догадаться, что 51%, 49% и 5% — это наши старые знакомые — вероятности.

Возьмем формулу вероятности и найдем из нее, чему равно число интересующих нас благоприятствующих случаев. Это и будет *МО*. В формуле оно стоит в числителе.

Математическое ожидание = MO = число благоприятствующих случаев = = общее число равновозможных $\times$ вероятность случаев.

Заметим, что MO, в отличие от вероятности, выражается всегда именованным числом: количеством курочек или петушков, числом метров или килограммов.

По смыслу математическое ожидание есть среднее значение случайной величины, которое мы определяем заранее. Остается только подождать до тех пор, пока случай не подтвердит наши расчеты.

Математическое ожидание, как и вероятность, нужно для того, чтобы уверенно управлять случаем. О том, как математическое ожидание помогает принимать правильное решение, речь пойдет в следующем рассказе.

ГРУЗОВИКИ ДЛЯ... СЫРОСТИ

Дело было давно, когда я еще учился в восьмом классе. Речь шла о перевозке дров. На мою долю выпало заказать грузовую машину, чтобы перевезти дрова с лесосклада в школу: зима была на носу.

С автобазы обещали прислать один трехтонный грузовик. Нужно было решить, сколько всего понадобится машине сделать рейсов для перевозки.

На складе нам была выделена поленница дров длиной 6 м, шириной 2 м и высотой 3 м. Заведующий складом сказал, что два кубических метра дров весят одну тонну.

Подобную задачу мы решали в свое время по арифметике. Есть она и теперь в задачнике для 5—6-х классов. Вот решение задачи с дровами в три вопроса.

1). Какой объем занимает поленница дров?

6 м $\times$ 2 м $\times$ 3 м = 36 кубических метров.

2). Сколько весят дрова?

$$36 \text{ куб. м} : 2\frac{\text{тонна}}{\text{куб. м.}} = 18 \text{ тонн.}$$

3). Сколько нужно машин (или рейсов одной машины) для перевозки дров?

18 тонн : 3 тонны = 6 машин (рейсов).

Я заказал 6 рейсов машины и... просчитался.

События развивались так. Когда трехтонка приехала на склад и школьники уже готовы были набросать в нее положенные 6 кубометров дров (одну шестую от общего объема), шофер забастовал:

— Не дам гробить машину. Больше трех тонн груза не возьму.

Я стал объяснять ему, что шесть кубометров дров — это как раз и есть три тонны, но шофера не так-то просто было убедить. (Как мы потом узнали, он заочно учился в институте и хорошо разбирался в математике.)

Весь расчет был построен на том, что на одну тонну приходится два кубометра дров. Так сказал завскладом. Но о каких дровах шла речь? Одно дело — дрова сухие и совсем другое — сырые. Сухих дров на одну тонну идет 3 кубометра, а сырых — лишь один. Завскладом в общем-то был прав. В среднем действительно получается:

$$\frac{3+1}{2} = 2\frac{\text{куб. м.}}{\text{тонна}}.$$

Возможность (мы бы теперь сказали — вероятность) того, что дрова в это время года сырые, — 50% (или 0,5). Давайте найдем, сколько всего можно ожидать тех и других дров в поленнице.

Итак, как мы сказали бы теперь: чему равно математическое ожидание (*МО*) тех и других дров?

$$\textit{МО} \text{ сырых дров} = 36 \text{ куб. м} \times 0{,}5 = 18 \text{ куб. м.}$$
$$\textit{МО} \text{ сухих дров} = 36 - 18 = 18 \text{ куб. м.}$$

Теперь определим, сколько весят эти дрова.

$$\text{Вес сырых дров} = 16 \text{ куб. м} : 1\frac{\text{куб. м.}}{\text{тонна}} = 18 \text{ тонн.}$$

$$\text{Вес сухих дров} = 18 \text{ куб. м} : 3\frac{\text{куб. м.}}{\text{тонна}} = 6 \text{ тонн.}$$

$$\text{Общий вес дров} = 6+18=24 \text{ тонны.}$$

Поскольку сырые и сухие дрова в поленнице перемешаны и на полене не написано, какое оно, то это означает, что на одну машину придется:

$$24 \text{ тонны} : 6 \text{ рейсов} = 4 \text{ тонны.}$$

Конечно, на трехтонку лишнюю тонну грузить нельзя. Сколько же потребуется рейсов, чтобы перевезти дрова?

$$24 \text{ тонны} : 3\frac{\text{тонны}}{\text{рейс}} = 8 \text{ рейсов.}$$

Получилась неувязка: вместо заказанных шести рейсов — восемь.

Два лишних грузовика понадобилось для перевозки сырости.

К счастью, шофер оказался не только хорошим математиком, но и отличным парнем. Он довел решение нашей задачи до конца, сделав два лишних рейса во славу науки.

В КАКОЙ РУКЕ?

Арифметика случайностей, подобно обычной арифметике, имеет дело со сложением и умножением. О том, как складываются и умножаются вероятности, и пойдет наш рассказ.

Когда садятся за шашки или шахматы, то первым делом кто-нибудь из партнеров берет в одну руку белую шашку или пешку, в другую — черную, прячет руки за спину, что-то там колдует и спрашивает: «В какой руке?» Так разыгрывают, кому играть «белыми», а кому «черными».

Впрочем, вопрос «В какой руке?» задается часто и тогда, когда никто и не собирается ни во что играть.

Например, вы на двоих с товарищем достали, увы, всего один билет в театр. Одному можно пойти. Кому? Помогает вопрос: «В какой руке?».

Волейбольный матч. Кому на какой стороне площадки начинать игру? Опять: «В какой руке?».

Читатель уже, конечно, сообразил, что «В какой руке?» — это дело все того же неуловимого случая. Ведь никто не может заранее предсказать точно, в какой руке окажется белая шашка или другой заветный жребий.

А что тут может сказать арифметика случайностей? Оказывается, кое-что может. Зададим ей несколько вопросов.

В о п р о с п е р в ы й. Какова вероятность угадать, в какой руке жребий?

Отвечает формула вероятности.

Общее число равновозможных случаев — 2 (первый — угадал; второй — не угадал).

Число благоприятствующих случаев — 1 (угадал).

$$\text{Вероятность угадать, в какой руке жребий} = \frac{\text{число благоприятствующих случаев}}{\text{общее число равновозможных случаев}} = \frac{1}{2} = 0{,}5, \text{ или } 50\%.$$

Точно так же находится и ответ на противоположный вопрос: какова вероятность не угадать, в какой руке жребий?

$$\text{Вероятность не угадать, в какой руке жребий} = \frac{\text{число благоприятствующих случаев}}{\text{общее число равновозможных случаев}} = \frac{1}{2} = 0{,}5, \text{ или } 50\%.$$

Много это или мало?

Смотрим на «градусник». Ни много, ни мало — ровно середина шкалы. Шансы угадать и не угадать равные. И это вполне справедливо. Поэтому-то таким честным способом охотно пользуются. Мы, конечно, исключаем жульничество. Хотя оно и бывает, но к теории вероятностей никакого отношения не имеет.

Правильно ли мы пользуемся жребием, отгадывая «В какой руке?», можно легко проверить, задав следующий вопрос.

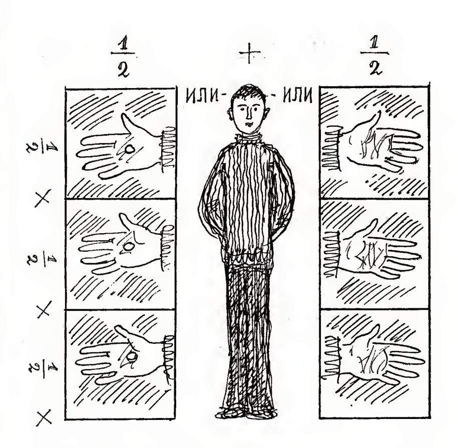
В о п р о с в т о р о й. Какова вероятность угадать или не угадать, в какой руке жребий?

Общее число равновозможных случаев, как и при первом вопросе, 2 (угадал, не угадал). Число благоприятствующих случаев — 2. Ведь для данного вопроса нас устраивают оба случая: угадал или не угадал.

По формуле вероятности:

$$\text{вероятность угадать или не угадать, в какой руке жребий} = \frac{\text{число благоприятствующих случаев}}{\text{общее число равновозможных случаев}} = \frac{2}{2} = 1{,}0, \text{ или } 100\%.$$

Этот ответ означает, что наш жребий всегда дает какой-нибудь один из двух возможных результатов (или угадал,



или не угадал), то есть он срабатывает безотказно, как говорят, «на все сто».

Отвечая на второй вопрос, мы, сами того не ведая, применили одну из основных теорем арифметики случайностей — *теорему сложения вероятностей*.

Звучит эта теорема примерно так: вероятность того, что произойдет одно из двух взаимоисключающих событий — или одно, или другое, — равна сумме вероятностей этих событий.

Доказать это довольно просто. Вспомним, как была найдена вероятность угадать или не угадать, в какой руке жребий. Мы взяли число интересующих нас случаев — 2 — и

разделили его на число всех возможных случаев — тоже 2. В ответе получили 1,0. Этот результат можно получить и иначе.

Перепишем решение так:

$$\text{вероятность угадать или не угадать, в какой руке жребий} = \frac{2}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Отвечая же на первый вопрос, мы получили, что

$$\frac{1}{2} = \text{Вероятности не угадать, в какой руке жребий.} = \text{Вероятность угадать, в какой руке жребий}$$

Подставляя в предыдущую формулу вместо $^1/_2$ ее значения, получим подтверждение теоремы сложения вероятностей:

$$\text{Вероятность угадать или не угадать, в какой руке жребий} = \text{вероятность угадать, в какой руке жребий} + \text{вероятность не угадать, в какой руке жребий.}$$

Это как раз и требовалось доказать.

А теперь вопрос посложнее.

Участнику школьного шахматного турнира приходится угадывать «В какой руке?» дважды. В этот день он по очереди встречается с двумя противниками.

Вопрос третий. Какова вероятность угадать, в какой руке жребий, два раза подряд?

Снова формула вероятности. Но общее число равновозможных случаев здесь будет другое. Оно равно 4 — по числу возможных вариантов результатов двух угадываний:

— в первый раз угадал, а во второй — не угадал;
— в первый раз не угадал, а во второй — угадал;
— в первый раз угадал и во второй — угадал;
— в первый раз не угадал и во второй — не угадал.

Число благоприятствующих случаев — лишь один из этих вариантов, тот, в котором повезло оба раза.

Применим формулу вероятности.

$$\text{Вероятность угадать, в какой руке жребий, два раза подряд} = \frac{\text{число благоприятствующих случаев}}{\text{общее число равновозможных случаев}} = \frac{1}{4} = 0{,}25, \text{ или } 25\%.$$

Это небольшая вероятность. Поэтому того, кто так здорово, два раза подряд, угадывает «В какой руке?», и называют счастливчиком.

Попробуем переписать последний расчет немного подругому:

вероятность угадать, в какой руке жребий, два раза подряд =

$$= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \text{вероятность угадать, в какой руке жребий} \times \text{вероятность угадать, в какой руке жребий}.$$

Оказывается, рассчитывая вероятность угадать, в какой руке жребий, два раза подряд, мы незаметно для себя перемножили вероятности угадывания жребия для первого и второго раза. Тем самым мы применили еще одну основную теорему арифметики случайностей — теорему умножения вероятностей.

Смысл этой теоремы можно выразить так: вероятность того, что событие произойдет два раза подряд, равна произведению вероятностей появления этого события первый и второй раз. Или (в более общем виде): вероятность совместного появления каких-либо независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Независимыми события называют в том случае, когда от появления одного из них вероятности остальных не меняются.

Теперь мы готовы к ответу на последний, самый сложный из наших вопросов.

Вопрос четвертый. Какова вероятность хотя бы один раз угадать, в какой руке жребий, при двух угадываниях?

Число всех возможных случаев при двух угадываниях мы уже знаем. Оно равно 4 — по числу возможных случаев — вариантов:
— в первый раз угадал, а во второй — не угадал;
— в первый раз не угадал, а во второй — угадал;
— в первый раз угадал и во второй — угадал;
— в первый раз не угадал и во второй — не угадал.

Число интересующих нас случаев здесь 3. Нам нужны лишь те случаи, при которых есть угадывание. Это:
— в первый раз угадал, а во второй — не угадал;
— в первый раз не угадал, а во второй — угадал;
— в первый раз угадал и во второй — угадал.

По формуле вероятности:

вероятность хотя бы один раз угадать, в какой руке жребий, при двух угадываниях =

$$= \frac{\text{число благоприятствующих случаев}}{\text{общее число равновозможных случаев}} = \frac{3}{4} = 0{,}75, \text{ или } 75\%.$$

Этот же результат, чтобы не перебирать варианты (а их может быть очень много), попробуем получить с помощью уже известных нам теорем сложения и умножения вероятностей.

Сначала, согласно теореме сложения, получаем:

вероятность хотя бы один раз угадать, в какой руке жребий, при двух угадываниях =

= вероятность угадать в первый раз и не угадать во второй + вероятность не угадать в первый раз и угадать во второй + вероятность угадать оба раза.

Мы применили теорему сложения, так как нам подходит любой из трех вариантов событий, вероятности которых мы складываем (или первый, или второй, или третий).

Вероятности же событий при каждом варианте можно рассчитывать по теореме умножения. Например, для первого варианта:

вероятность угадать в первый раз и не угадать — во второй =

= вероятность угадать, в какой руке жребий, в первый раз. × вероятность не угадать, в какой руке жребий, во второй раз.

Мы здесь пользуемся теоремой умножения, так как нам нужно, чтобы состоялись оба события, вероятности которых мы перемножаем (и первое и второе).

Раскрывая таким же путем значения всех слагаемых, мы придем к развернутой формуле:

вероятность хотя бы один раз угадать, в какой руке жребий, при двух угадываниях =

= вероятность угадать, в какой руке жребий в первый раз × вероятность не угадать, в какой руке жребий во второй раз +

+ вероятность не угадать, в какой руке жребий в первый раз × вероятность угадать, в какой руке жребий во второй раз +

+ вероятность угадать, в какой руке жребий, в первый раз × вероятность угадать, в какой руке жребий, во второй раз.

Формула получилась хотя и длинная, но простая (это все же лучше, чем наоборот). Подставим теперь в нее цифры и увидим, что в конечном счете все получилось как надо:

$$\text{вероятность хотя бы один раз угадать, в какой руке жребий, при двух угадываниях} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=0{,}75, \text{ или } 75\%.$$

75% — вероятность весьма приличная. Она наполняет сердца всех тянущих жребий надеждой, подводя научную базу под известное утешение оптимистов: «Не повезло в этот раз, повезет в следующий».

Утешиться этой мыслью придется и тем читателям, которым разговор о теоремах арифметики случайностей показался сложноватым.

Им, возможно, повезет в следующем рассказе.

КУБИНСКАЯ МАРКА С ПЕЧАТЬЮ

Теоремы сложения и умножения вероятностей, с которыми мы только что познакомились, для арифметики случайностей означают то же самое, что правила сложения и умножения — для арифмстики обычной. Стоит появиться случайному событию, как сразу же требуется их помощь.

Вспоминается такой случай.

Однажды к нам зашел соседский мальчик Коля посмотреть мою коллекцию марок. На прощанье я решил подарить ему хорошую марку.

У каждого коллекционера есть резервные марки — двойники, которые он держит для обмена. Был такой резерв и у меня.

— Какую марку ты бы хотел получить? — спросил я Колю.

— Да мне все равно, — Коля замялся, — но лучше всего Кубу или Вьетнам. Этих стран у меня почти совсем нет...

Марки-двойники лежали у меня навалом в картонной коробке.

— Посмотрим, повезет тебе сразу или нет, — сказал я

и уже собрался было запустить пинцет в коробку за маркой, но тут Коля спросил:

— А почему вы сомневаетесь, повезет ли мне?

— Пожалуй, стоит объяснить. Ведь это так же интересно, как и марки собирать.

Я отложил пинцет, и на несколько минут мы с Колей перенеслись в мир необычайной арифметики — арифметики случайностей.

Представим себе, что в коробке лежит 130 марок, из них 78 кубинских и 26 вьетнамских. Я собираюсь взять пинцетом наугад любую марку из коробки. Какова вероятность, что эта марка окажется «Кубой» или «Вьетнамом»?

Здесь два события: одно — вытащить «Кубу», другое— вытащить «Вьетнам».

Вначале по формуле вероятности находим вероятность одного события:

$$\text{вероятность вытащить «Кубу»} = \frac{\text{число благоприятствующих случаев}}{\text{общее число равновозможных случаев}} = \frac{78}{130} = 0{,}6, \text{ или } 60\%.$$

Точно так же находим и вероятность другого события. Только нужно учесть, что в коробке уже осталось 129 марок.

$$\text{Вероятность вытащить «Вьетнам»} = \frac{26}{129} = 0{,}2, \text{ или } 20\%.$$

Интересующая нас вероятность того, что произойдет одно из двух событий — «Куба» или «Вьетнам», — находится по теореме сложения вероятностей:

$$\text{вероятность вытащить «Кубу» или «Вьетнам»} =$$
$$= \text{вероятность вытащить «Кубу»} + \text{вероятность вытащить «Вьетнам»} =$$
$$= 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8, \text{ или } 80\%.$$

— Теперь давай на опыте проверим, правильно ли мы все рассчитали, — предложил я. — Восемьдесят процентов — большая вероятность, почти наверняка тебе сразу достанется то, что нужно.

И действительно, при первой же попытке пинцет зацепил красивую кубинскую марку.

Марка оказалась с печатью, и я решил задать любознательному филателисту еще одну задачу.

— А ведь знаешь, — сказал я, — у меня в коробке примерно четверть всех марок чистых, без печатей. Давай сообразим, какова была вероятность того, что взятая наугад марка должна была принадлежать «Кубе» или «Вьетнаму» и, кроме того, еще и не иметь печати.

Оказывается, и этот расчет не составляет большого труда.

Здесь вероятность одного события — это вероятность вытянуть «Кубу» или «Вьетнам». Она нам известна и равна 0,8.

Вероятность другого события — это вероятность вытянуть чистую марку из коробки. Ее мы тоже знаем; она равна 0,25.

Интересующая же нас вероятность совместного появления двух этих событий находится по теореме умножения вероятностей:

$$\text{вероятность вытащить «Кубу» или «Вьетнам» без печати} =$$
$$= 0{,}8 \times 0{,}25 = 0{,}2, \text{ или } 20\%.$$

Это маленькая вероятность, поэтому Коле и не досталась марка без печати.

* * *

Теперь мы уже кое-что знаем про арифметику случайностей. Встречи с ней на заводе, в колхозе, на птицефабрике не прошли бесследно.

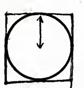
Оказывается, меру случайного — вероятность — можно складывать и умножать, как обычные числа. Можно заранее рассчитать, что следует ожидать от переменчивого Случая.

Мы поняли, как много зависит от Случая в окружающем нас мире.

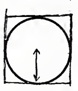
Заглянем в этот мир, поближе познакомимся со случайностями там, где их вроде бы меньше всего можно ожидать: в науке о языке и в литературе, на дне рождения и даже в ленинградском зоопарке.

Глава 6

СЛУЧАЙНОСТИ ТАИНСТВЕННЫЕ И ВЕСЕЛЫЕ,



в которой удается прочесть шифрованное письмо; устанавливается, знал ли Ленский теорию вероятностей; выясняется: можно ли одновременно праздновать два дня рождения, какова площадь необитаемого острова, что такое Монте-Карло и как бомба могла попасть в единственного в Ленинграде слона



ТАЙНА ШИФРА

— Вот уж где меньше всего могут быть случайности...

— Грамматические правила и вдруг — вероятность...

— Неужели нет ни одной науки без арифметики?..

Все это послышалось мне, когда я дописал предыдущую главу до конца, до того места, где обещал рассказать о случайностях в науке о языке.

...Передо мной лежит странное письмо. Это лист бумаги, густо покрытый какими-то загадочными знаками: кружками, треугольниками, квадратами, флажками. Ни на какие буквы эти знаки не похожи. Вот это письмо — на рисунке. Судите сами. Письмо попало ко мне на стол случайно. Однажды я купил несколько старых книг. В одну из них неизвестно кем и когда был вложен конверт с этим письмом.

Кто может оставаться равнодушным, когда встречается с Тайной?

Что здесь может быть написано? Наверняка кто-то решил сообщить нечто важное, какой-то секрет. А чтобы секрет сохранить, зашифровал письмо.

Я начал соображать. Как можно зашифровать то, что написано? Видимо, неизвестный автор письма придумал для каждой буквы алфавита свое обозначение. Например, букву А обозначил треугольником, Б — кружком, В — флажком и так далее. Получился шифр — код. А имея та-

кой код, уже нетрудно переписать с его помощью любое послание.

Не имея кода, никто не сможет догадаться, какие были придуманы знаки для всех букв алфавита. Только волшебник может узнать, что у другого человека на уме.

Оказывается, такой волшебник есть. Этот маг и чародей — вероятность.

Внимательные люди давно заметили, что каждая буква алфавита в среднем повторяется в книгах одинаково часто.

Если взять, например, собрание сочинений Гайдара и подсчитать, какую часть от всех букв составляет, скажем, буква А, то окажется, что доля этой буквы равна 0,06, или 6 процентов.

То же самое будет и для собрания сочинений Маршака. Михалкова и даже для Большой советской энциклопедии в пятидесяти томах.

Но что означает «доля буквы А равна 0,06»? Откуда можно взять эту цифру?

Видимо, нужно сосчитать все буквы в какой-нибудь книге и отдельно пересчитать, сколько раз там появилась буква А. Затем найти интересующую нас долю.

$$\text{Доля буквы } A \text{ в книге} = \frac{\text{число букв } A}{\text{число всех букв}} = 0{,}06, \text{ или } 6\%.$$

Знакомая формула, не правда ли?

Мы уже знаем, что почти так же выглядит формула вероятности. Но только там в числителе и знаменателе стояли числа благоприятствующих и всех равновозможных случаев, а здесь — число букв. Смысл один и тот же.

Сходство этих формул наводит нас на мысль: а нельзя ли подсчитать заранее долю буквы А в каких-нибудь нескольких книгах и потом воспользоваться ею как вероятностью появления этой буквы в любой книге, написанной на русском языке. И даже... в письме.

Вот ключ к решению. Этим ключом я и воспользовался. Прежде всего я постарался узнать, чему равны вероятности появления различных букв алфавита. Ученые уже давно рассчитали эти цифры, которые, как мы увидим, нужны людям различных специальностей.

Оказывается, наиболее часто встречается в книгах буква О. Вероятность ее появления равна 0,09. Затем идет Е — 0,07, после этого А и И — по 0,06 и т. д. Но наиболее ча-

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ В ТЕКСТЕ БУКВ РУССКОГО АЛФАВИТА И ЧАСТОТЫ ПОЯВЛЕНИЯ ИХ В ПИСЬМЕ

Вероятность букв русского алфавита	Буквы	Частоты появления знаков в письме	Знаки шифра	Возможные значения знаков шифра
0,18	Пробел	0,18		Пробел
0,09	О	0,09		О
0,07	Е	0,07		—
0,06	А,И	0,06		А,И,Е,Т,Н
0,05	Т,Н	0,05		Т,Н,А,И,С,Р,В,Л
0,04	С,Р,В,Л	0,04		С,Р,В,Л,Т,Н,К,М
0,03	К,М	0,03		К,М,С,Р,В,Л,Д,П, У,Я,Ы,З
0,02	Д,П,У,Я, Ы,З	0,02		Д,П,У,Я,Ы,З,К,Ж,Ь, Б,Г,Ч,И,Х,Ж,Ю,Ш
0,01	Ь,Б,Г,Ч,Й, Х,Ж,Ю,Ш	0,01		Ь,Б,Г,Ч,Й,Х,Ж,Ю,Ш, Д,П,У,Я,Ы,З,Ц,Щ,Э
менее 0,01	Ц,Щ,Э,Ф	менее 0,01		Ц,Ш,Э,Ф,Ь,Б,Г,Ч,Й, Х,Ж,Ю,Ш

Примечание: буква Ё считается как Е, а буква Ъ как Ь.

сто, оказывается, появляется не какая-нибудь буква, а пробел между словами. Вероятность появления пробела 0,18.

Затем я принялся за работу. Моя задача заключалась в том, чтобы подсчитать, как часто каждый из значков появляется в загадочном письме. Работа эта не очень трудная, хотя и требует некоторого времени и внимания.

Наконец в моих руках была частота появления в письме всех знаков шифра, и я выписал их и соответствующие знаки в третьем и четвертом столбце таблицы. При этом я для удобства и наглядности расположил эти частоты в тех же строчках, в которых стояли равные им по величине вероятности появления в тексте букв русского алфавита.

Вот, например, знак ⚐ встретился нам в письме 159 раз, а всего знаков мы насчитали 887. Значит, частота этого знака равна $\frac{159}{887}$ около 0,18 и его место в той же строке таблицы 2, что и обозначение пробела, вероятность которого тоже 0,18.

Знак ▽ имеет частоту, равную $\frac{88}{887}$ = около 0,09, и мы поместили его в строчку, где буква О, вероятность которой тоже 0,09. И так далее.

Как только мы узнали, что флажок — это знак пробела, в письме сразу проявились отдельные слова.

Посмотрите на письмо: отдельные слова — это все то, что стоит между флажками. Очень даже просто.

Затем справа от знаков шифра в таблице я стал записывать те обозначения и буквы, которым эти знаки соответствуют. Так, рядом со знаком ⚐ появился пробел, рядом со знаком ▽ — буква О. К сожалению, дальше расшифровка пошла труднее, так как с частотой 0,07 не оказалось ни одного знака, а с частотой, близкой к 0,06, — целых три.

Я поступил так. Продолжал как ни в чем не бывало и дальше выписывать справа от знаков все возможные буквы алфавита, которые могут соответствовать шифру. Это те буквы, вероятности которых равны или почти не отличаются от частоты соответствующих знаков (не более, чем на 0,01). Небольшое отличие не должно нас смущать, ведь

мы знаем, что вероятность есть средняя величина и в каждом отдельном случае могут быть незначительные отклонения.

Таким образом, например, в строке вероятности 0,06 рядом со знаками M, ⊙, ◇ появились буквы А, И, Е, Т, Н; в строке вероятности 0,05 рядом со знаками D, ⊞ — буквы Т, Н, А, И, С, Р, В, Л и так далее.

Затем я использовал такой хитрый прием. Выписал все знаки, которые в шифровке оказались однобуквенными словами — они одиноко стоят между двумя флажками.

Вот эти знаки: ⊙, △, D, ♀, ⊟, ⊞

Дальше я рассудил так. Знаки M, ⊙, ◇, стоящие в строке вероятности 0,06 рядом с буквами А, И, Е, Т, Н, могут означать любую из них. Как однобуквенное слово встречается только знак ⊙. Следовательно, этот знак может быть либо А, либо И, ибо остальные буквы (Е, Т, Н) в качестве однобуквенных слов не встречаются.

Как же теперь отличить А от И?

Давайте поработаем дальше вместе.

Если внимательно просмотреть письмо, можно заметить, что знак ⊙ нигде не удваивается. Между тем, буква И, как известно, довольно часто дает удвоения. Значит, вероятнее всего, что знак ⊙ — это буква А.

Заведем специальную таблицу и станем вписывать в нее значения всех расшифрованных знаков. Пока нам известны только значения знака пробела и букв О и А.

Оставшиеся знаки этой строки M и ◇ могут означать буквы Е, Т, Н, которые не бывают однобуквенными словами.

Просмотрев письмо, мы находим, что знак ◇ встречается в двухбуквенном слове вместе с уже известным нам знаком ▽ — буквой О (третье слово в шестнадцатой строке письма). Значит, это не может быть буква Е. Ведь таких сочетаний в двухбуквенных словах не бывает. Остаются

две возможные буквы: Т и Н. Но буква Н часто удваивается, а наш знак ни разу не дает удвоения. Видимо, вероятнее всего это буква Т.

РАЗГАДАННЫЕ ЗНАКИ ШИФРА

Буквы алфавита	Знаки шифра	Буквы алфавита	Знаки шифра
А	⊙	Р	⋈
Б	⌓	С	⍑
В	⟁	Т	◈
Г	⧩	У	⊟
Д	△	Ф	⧖
Е	⩀	Х	◇
Ж	⧠	Ц	⦶
З	⊠	Ч	⊡
И	D	Ш	⊕
Й	Σ	Щ	⍔
К	⧗	Ы	⊖
Л	◡	Ь	▢
М	□	Э	⍍
Н	◫	Ю	○
О	▽	Я	⊞
П	◖	Пробел	⚐

Остается знак ⩀, который может означать буквы Е или Н.

Выбор нам поможет сделать второе слово в первой строч-

ке письма. Предпоследний знак в нем, как мы определили, означает букву Т, поэтому последний знак вряд ли может быть буквой Н. Таких сочетаний в конце слова не бывает. Вероятнее всего, что это буква Е.

Перейдем к строке с вероятностью 0,05. Этой вероятности соответствуют два знака и , которые могут обозначать шесть неизвестных букв: Н, И, С, Р, В, Л (знаки А и Т мы только что узнали).

Однобуквенные слова дает только знак . Он может обозначать буквы И, С, В. Но из этих трех наиболее вероятно ожидать удвоения в конце слова от буквы И. Такое удвоение знак дает в первом слове четвертой строки. Значит, это буква И.

Оставшийся знак может обозначать буквы Н, Р, Л (этот знак в однобуквенных словах не встречается, поэтому С и В отпадают). Удвоения скорее всего следует ожидать от буквы Н. Такое удвоение есть в первом слове третьей строки. Значит, это буква Н.

Спустимся ниже, к вероятности 0,04. Здесь два знака и соответствуют шести неизвестным буквам: С, Р, В, Л, К, М. Знак дает однобуквенные слова, поэтому он может обозначать С, В, К. Выбор буквы здесь удобно сделать так.

Найдем одно или несколько слов, в которых знак встречается вместе с уже известными нам буквами. Это, например, последнее слово в десятой строке и предпоследнее — в пятнадцатой. Станем подставлять в эти слова по очереди буквы С, В и К и убедимся, что это может быть только буква С.

Оставшийся знак может быть одной из букв: Р, Л, М. Подыщем слово, в котором этот знак встречается вместе с уже известными нам буквами. Это второе слово в тридцать первой строке. Подбором находим, что знак может обозначать только букву Р.

Теперь нам уже нетрудно таким же путем разгадать и все остальные знаки шифра. Результаты этих поисков помещены в таблице.

Букв Ф и Щ в письме нет, поэтому придумаем их шифр сами, чтобы получить алфавит полностью.

Наконец наступает долгожданный момент полной расшифровки письма. Расставим все буквы по местам и прочтем текст, который показан на рисунке. Он, правда, без знаков препинания и переносов, но вполне понятен и даже как будто... знаком. Где-то мы эту таинственную белиберду уже слышали.

Ну конечно. Это же знаменитое письмо Тома Сойера из книги «Приключения Гекльберри Финна» Марка Твена.

Том, правда, отправлял его в незашифрованном виде, но мне кажется, имей он под рукой шифр вроде нашего, все было бы сделано как надо. Так и поступил безымянный хозяин конверта, найденного в старой книге. Совсем в духе того, кто давным-давно сочинил это таинственное послание.

* * *

— Так это была игра... — разочарованно протянул один юный товарищ, которому я рассказал про тайну шифра.

Да, игра, но весьма поучительная. Она наводит на мысль, что без математики, без теории вероятностей нечего и думать о решении многих важных задач.

И действительно, прочтение историком, археологом старинных рукописей, текстов на забытых и ныне никому не известных языках, глубокое изучение современных языков многим обязано математике.

Каждому понятно, как важно на войне раскрыть шифр противника, суметь выведать его секреты. И эта задача по плечу науке о языке в союзе с математикой.

Математика плюс языкознание сделали возможным чудо электронной вычислительной техники — машинный перевод с одного языка на другой.

Для того чтобы машина могла «понять» человеческие слова, нужно прежде всего найти с ней «общий язык». Языком, одинаково доступным как человеку, так и машине, является язык цифр — математика.

Как мы только что видели на примере шифрованного письма, языку свойственны вполне определенные математические закономерности. Их изучением занимается молодая

Не выдавайте меня я ваш др
уг Целая шайка самых отчая
нных злодеев с Индейской т
ерритории собирается нынче
ночью украсть вашего бегл
ого негра они вас пугали ч
тобы вы сидели дома и не м
ешали им Я тоже из шайки т
олько я уверовал в бога и
хочу бросить разбой и стат
ь честным человеком вот по
чему я вам выдаю их адский
замысел Они подкрадутся с
севера вдоль забора ровно
в полночь у них есть подд
ельный ключ от того сарая
где сидит беглый негр Если
им будет грозить опасност
ь я должен протрубить в ро
жок но вместо этого я буду
блеять овцой когда они за
берутся в сарай а трубить
не стану Пока они будут сн
имать с него цепи вы подкр
адитесь и заприте их всех
на замок тогда вы их может
е спокойно убить Делайте т
о что я вам говорю и больш
е ничего а не то они чтони
будь заподозрят и поднимут
целый тарарам Никакой наг
рады я не желаю с меня дов
ольно и того что я поступи
л почестному Неизвестный д
руг

наука, появившаяся на стыке математики и лингвистики,— математическая лингвистика. С ее помощью электронно-вычислительные машины и осуществляют перевод с одного языка на другой.

Даже такой не математический предмет, как литература, и тот иногда раскрывается по-новому в свете теории вероятностей. Попытаемся проделать это в следующем рассказе.

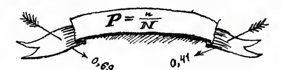
ЗНАЛ ЛИ ЛЕНСКИЙ ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ?

Теория вероятностей — сравнительно молодая наука. Видимо, поэтому ее и не изучают до сих пор в школе, хотя в порядке опыта преподавание уже кое-где началось.

А во времена А. С. Пушкина теорию вероятностей не знали и многие весьма образованные люди. Поэт Владимир Ленский, который учился в знаменитом Геттингенском университете и «из Германии туманной привез учености плоды», вряд ли знал теорию вероятностей.

Между тем случай сыграл в его жизни роковую роль.

Вот драматические обстоятельства его дуэли с Евгением Онегиным, которые Пушкин описал столь подробно, что по ним можно точно восстановить картину поединка.



Плащи бросают два врага.
Зарецкий тридцать два шага
Отмерил с точностью отменной,
Друзей развел по крайний след,
И каждый взял свой пистолет.
«Теперь сходитесь».
Хладнокровно,
Еще не целя, два врага
Походкой твердой, тихо, ровно
Четыре перешли шага,
Четыре смертные ступени.

Свой пистолет тогда Евгений,
Не преставая наступать,
Стал первый тихо подымать.

Вот пять шагов еще ступили,
И Ленский, жмуря левый глаз,
Стал также целить — но как раз



Онегин выстрелил... Пробили
Часы урочные: поэт
Роняет молча пистолет.

Противники в начале дуэли находились на расстоянии 32 шагов друг от друга. Затем, по сигналу секунданта, они начали сближаться. Целиться можно было, лишь пройдя 4 шага, когда расстояние сокращалось до 24 шагов ($32-4\times2$).

Свой смертельный выстрел Онегин сделал, когда было пройдено еще по 5 шагов, с расстояния 14 шагов ($24-5\times2$). Ленский в этот момент только начал целиться. Все решал Случай...

Это дает нам возможность попытаться с помощью арифметики случайностей получить ответ на роковой вопрос, который, как мы знаем, был у Ленского на устах: «Паду ли я, стрелой пронзенный, иль мимо пролетит она?»

На языке теории вероятностей этот вопрос звучит несколько менее поэтично.

Каков возможный результат предстоящего поединка? Какова вероятность того, что пуля, выпущенная из пистолета Онегина, попадет в Ленского?

Для того чтобы ответить на эти вопросы, конечно, не-

плохо было бы знать, что за стрелки были наши герои. Поэт об этом умалчивает. Будем для простоты считать, что они стреляют примерно одинаково. Выстрелы, которые они могут сделать с расстояния 24 шагов, оценим вероятностью попадания 0,1. А выстрелы с расстояния 14 шагов — вероятностью 0,6. Эти цифры примерно соответствуют возможностям дуэльных пистолетов, которые были в ходу во времена Пушкина.

Будем также считать, что выстрелы возможны только на первом или на последнем — пятом — шаге, а между ними стрельба исключается — ведь не стрелял же почему-то Онегин целых пять шагов.

Примем также, что Ленский решил стрелять вторым. Это вполне соответствует его характеру.

Для того чтобы разбираться в попаданиях из дуэльных пистолетов, совсем не обязательно обзаводиться этим грозным оружием и, тем более, стрелять из него.

Обратимся к арифметике случайностей.

Прежде всего посмотрим, какова вероятность того, что Онегин попадет в Ленского при первом же шаге. Оценку ее мы уже произвели. Она равна 0,1. Это весьма небольшая цифра, и, если бы этим шагом дело ограничилось, наш поэт почти наверняка остался бы жив.

Но, как мы знаем, смертельный удар мог быть нанесен и на пятом шаге.

Какова же вероятность того, что после пятого шага пуля попадет в Ленского?

«После пятого» означает: или на первом, или на пятом. Такая вероятность, как мы знаем, по теореме сложения вероятностей равна сумме вероятностей попадания на первом и на пятом шаге.

Вероятность попадания Онегина в Ленского на дуэли =

= вероятность попадания Онегина на первом шаге + вероятность попадания Онегина на пятом шаге.

Первое из слагаемых нам уже известно — 0,1. Над вторым нужно поразмыслить.

Мы вначале установили, что на пятом шаге стрельба Онегина оценивается вероятностью 0,6. Но для того чтобы выстрел с такой вероятностью произошел, нужно, во-первых, чтобы Ленский к этому времени оставался жив — ведь Онегин мог его убить и на первом же шаге, а во-вторых,

чтобы был жив и сам Онегин — у него тоже есть некоторый шанс погибнуть, не сделав больше чем один шаг.

Итак, попадание в Ленского на пятом шаге требует трех событий: Онегин к моменту выстрела жив; Ленский — также; Онегин попадает в Ленского.

Вероятность наступления всех этих событий вместе, как мы знаем, по теореме умножения вероятностей, равна произведению вероятностей этих событий.

Вероятность попадания Онегина в Ленского на пятом шаге =

= вероятность того, что Онегин жив × вероятность того, что Ленский жив × оценка вероятности попадания Онегина на пятом шаге.

Оценка вероятности попадания Онегина в Ленского на пятом шаге нам известна — 0,6.

Вероятность того, что Ленский к моменту выстрела Онегина на пятом шаге жив, можно найти как вероятность того, что убийства на первом шаге не произойдет:

$$1-0{,}1=0{,}9.$$

При расчете вероятности того, что Онегин также будет жив к пятому шагу, надо учесть, что Ленский сможет выстрелить в него на первом шаге, лишь если Онегин на этом шаге промахнется. Ведь Ленский стреляет всегда вторым. Поэтому вероятность того, что Онегин доживет до пятого шага, несколько больше, чем у Ленского, и равна

$$1-0{,}9\times(1-0{,}9) = 1-0{,}09 = 0{,}91.$$

В скобках здесь вероятность того, что Ленскому на первом шаге не удается сделать свой выстрел, а из единицы мы вычитаем вероятность попадания Ленского в Онегина на первом шаге с учетом этого обстоятельства.

Теперь можно, подставив все эти значения, написать:

Вероятность попадания Онегина в Ленского на пятом шаге $= 0{,}91\times0{,}9\times0{,}6 = 0{,}49.$

И далее:

Вероятность попадания Онегина в Ленского на дуэли =

= вероятность попадания Онегина на первом шаге + вероятность попадания Онегина на пятом шаге =

$$= 0{,}1 + 0{,}49 = 0{,}59.$$

Точно таким же образом рассчитаем вероятность попадания Ленского в Онегина на дуэли.

Вероятность попадания Ленского в Онегина на дуэли =

= вероятность попадания Ленского на первом шаге + вероятность попадания Ленского на пятом шаге.

Вероятности попадания Ленского на первом шаге с учетом запаздывания его с выстрелом мы уже знаем — 0,09.

Запаздывание Ленского с выстрелом отразится и на расчетах пятого шага. Ведь у него мало шансов остаться к моменту своего выстрела в живых.

Вероятность попадания Ленского в Онегина на пятом шаге =

= вероятность того, что Ленский жив × вероятность того, что Онегин жив × оценка вероятности попадания Ленского на пятом шаге =

$$= (1-0{,}59) \times 0{,}91 \times 0{,}6 = 0{,}22.$$

И наконец:

Вероятность попадания Ленского в Онегина на дуэли $= 0{,}09 + 0{,}22 = 0{,}31.$

Теперь у нас достаточно сведений, чтобы осветить обстоятельства разыгравшейся трагедии, ответить на вопрос о возможном результате поединка.

Вероятность того, что Ленский будет сражен пулей из пистолета Онегина, равна 0,59. Это довольно большая вероятность. Ее грозный смысл станет более понятен, если сказать, что событие с такой вероятностью происходит 6 раз из 10. Вряд ли кто-нибудь из нас сел бы в поезд, если бы его ожидала подобная или даже много меньшая вероятность крушения.

Вероятность попадания в Онегина значительно, почти в два раза, скромнее — 0,31.

Итак, Ленский был фактически обречен еще до дуэли.

И все же мы не напрасно воскрешали столь далекий от нас варварский способ разрешения недоразумений.

Наши выкладки, оказывается, вполне подходят для многих расчетов, которые могут пригодиться и в современной жизни.

Что такое, например, перестрелка в бою, как не большая

дуэль. На дуэль похожи и некоторые другие военные и мирные случайные явления. Так что опыт, полученный нами на дуэли, не пропадет зря.

А теперь давайте переключимся с мрачной картины бессмысленного дуэльного смертоубийства на радостное событие — день рождения одноклассников.

ДАВАЙТЕ ВМЕСТЕ ПРАЗДНОВАТЬ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ

Началось все с того, что кто-то в классе предложил: если у каких-нибудь двух ребят дни рождения совпадут, устраивать общий праздник всем классом.

Идея понравилась. Но, как всегда, нашлись и сомневающиеся: а есть ли в классе хоть двое ребят, родившихся в один день? Ребята начали было спрашивать, когда у кого день рождения, чтобы узнать, нет ли двух в один день.

Между тем можно ответить на этот вопрос, даже не зная, кто когда родился. Для этого обратимся за помощью к теории вероятностей.

Вначале определим вероятность празднования дня рождения какого-нибудь школьника в один из дней года.

Здесь число всех возможных случаев — это число возможных дней рождения в году — 365. Число интересующих нас случаев — дней рождения одного человека в году — тоже 365.

$$\begin{array}{l}\text{Вероятность празднования дня рождения}\\ \text{каким-нибудь школьником в один из дней года}\end{array} = \frac{365}{365} = 1.$$

Действительно, можно с полной уверенностью сказать, что любой школьник за год отпразднует свой день рождения.

Теперь возьмем любого второго школьника и найдем вероятность того, что его день рождения не совпадает с днем рождения первого школьника.

Число всех возможных случаев — возможных дней рождения в году — остается здесь, конечно, тем же — 365, а вот число интересующих нас случаев уменьшается на 1 — ведь тот день, когда праздники могут совпадать, надо выбросить. Итак:

$$\begin{array}{l}\text{вероятность несовпадения дня рождения второго}\\ \text{школьника с днем рождения первого}\end{array} = \frac{365-1}{365} = \frac{364}{365}.$$

Затем возьмем любого третьего школьника и найдем подобным же образом, что:

$$\text{вероятность несовпадения дня рождения третьего школьника с днем рождения первого и второго} = \frac{365-2}{365} = \frac{363}{365}.$$

И далее для всех ребят в таком же духе. Потом зададим себе такой вопрос: а какая вероятность того, что и у первого, и у второго, и у третьего, и у всех остальных школьников дни рождения не совпадут? Вероятности таких событий, как нам уже известно, находят с помощью теоремы умножения.

$$\text{Вероятность несовпадения дней рождения у всех школьников в классе} = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \ldots$$

Число сомножителей равно числу ребят в классе. Если в классе, скажем, 40 ребят, то таких сомножителей должно быть 40. Стоит их перемножить, и получится, что вероятность несовпадения дней рождения у всех сорока́ школьников равна 0,11.

А то, что нас интересует, — вероятность совпадения — мы найдем, как вы, наверное, помните, путем вычитания этой цифры из единицы.

$$\text{Вероятность совпадения дней рождения у школьников} = 1 - 0{,}11 = 0{,}89.$$

Это высокая вероятность. Значит, почти наверняка в любом классе, где 40 школьников, есть ребята, родившиеся в один день.

А как быть тем классам, где число школьников 30 или 45 человек, ну, словом, отличается от 40?

ВЕРОЯТНОСТИ СОВПАДЕНИЯ ДНЕЙ РОЖДЕНИЯ

Число человек в группе	5	10	15	20	21	22
Вероятности совпадения дней рождения хотя бы у двух людей группы	0,03	0,12	0,25	0,41	0,44	0,48

На этот случай пригодится готовая таблица вероятностей совпадения дней рождения для разных групп людей — от 5 до 100 и более человек. Как она рассчитывается, мы уже знаем.

По нашей таблице получается, что, например, если в классе или группе 30 человек, то с вероятностью 0,71 можно считать, что дни рождения хотя бы у двух из них совпадут.

Можно провести необходимую проверку и праздновать общие дни рождения в любом коллективе.

В рассказе о дне рождения мы снова встретились с самой удивительной способностью теории вероятностей — даром предвидения, предсказания будущих событий. Вдумайтесь: мы с вами, не зная вовсе, когда кто родился, можем достаточно точно предсказать, в каких случаях дни рождения разных людей совпадают! Подобным образом теория вероятностей решает многие практические задачи: оценивает возможность получения определенного количества бракованных деталей, заданного числа попаданий в цель, показывает, сколько покупателей ожидать в магазине и многое другое.

Вероятность — мастер на все руки. Дни рождения и грамматика, погода и стрельба из пистолета, брак на производстве и количество вылупившихся петушков и курочек — арифметике случайностей до всего есть дело.

И, что особенно важно, теория вероятностей может выручить там, где другие науки оказываются не в состоянии решить нужную задачу.

Вот какую любопытную историю мне недавно довелось услышать.

У РАЗЛИЧНЫХ ГРУПП ЛЮДЕЙ

23	24	25	30	40	50	60	70, 80 90, 100 и более
0,51	0,54	0,57	0,71	0,89	0,97	0,99	около 1,0

Ребята придумали необычное состязание.

На Днепре, недалеко от Запорожья, есть несколько десятков небольших островков, на которых никто не живет. Каждому классу во время летних каникул был выделен один такой необитаемый остров. Была поставлена задача полностью его освоить, составить карту острова, определить размеры, площадь и наладить на нем походную жизнь в духе настоящего Робинзона. Класс, который лучше всех справится с этой задачей, получает приз — туристскую путевку в Москву.

Вначале все шло довольно гладко. Ребята построили хижины, удили рыбу самодельными удочками, добывали огонь с помощью кремня.

Но не это было самым трудным.

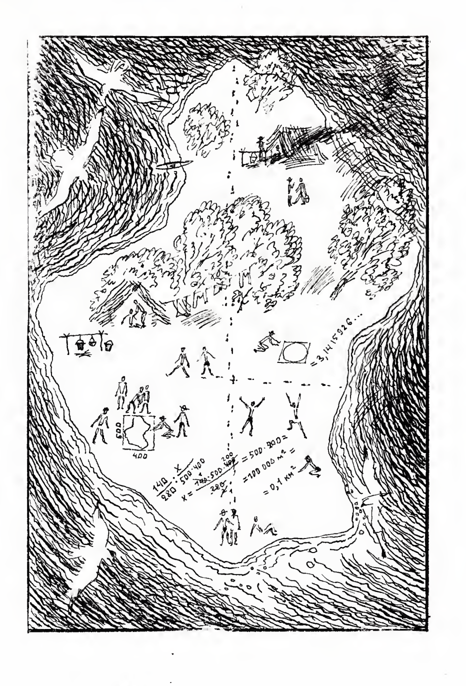
Наиболее сложным оказалось измерить остров и составить его карту — ведь у ребят-робинзонов по условиям состязания не было никаких измерительных приборов.

С честью выйти из трудного положения сумел лишь один из всех классов. Вот что придумали ребята.

Определение размеров острова они решили произвести с помощью древнейшего измерительного инструмента — человеческих ног.

Мера длины — один шаг. Измерения поручили «землемеру» — самому длинноногому из ребят. Точных размеров его шага, конечно, никто не знал, но зато каждый из двадцати восьми школьников, высадившихся на остров, имел свое представление о величине этой живой меры длины. Были опрошены все до единого. Каждый назвал свою цифру. Затем цифры сложили и разделили на 28 — число ребят. Получилась средняя предполагаемая длина шага «землемера». А так как каждый из ребят называл свою, случайную цифру размера шага, то полученная средняя величина оказалась средней ожидаемой длиной шага (вспомним *МО*), очень близкой к его действительному размеру. Впоследствии, вернувшись на «Большую землю», школьники измерили шаг «землемера» настоящей линейкой и были поражены, насколько точно сработал случай.

Определив единицу длины, можно было приступать к работе. «Землемер» прошагал остров вдоль и поперек. Теперь уже нетрудно было узнать его размеры по различным



=3,1415926...
500
400
140 : X
280 : 500·400
X = 140·500·400 / 280 = 500·200 =
=100 000 м²=
= 0,1 км²

направлениям. Остров оказался довольно сложной формы, не похожей ни на одну из простых фигур.

Задача измерения площади усложнилась: ведь здесь уже не обойдешься, как для прямоугольника, простым перемножением длины на ширину. Помогла смекалка и... арифметика случайностей.

Ребята нарисовали на песке карту острова. Это оказалось не очень трудным делом: все размеры острова сообщил «землемер».

Затем на карте около острова был описан обычный прямоугольник. Его стороны, оказалось, имели размеры: длина 500 метров, а ширина 400 метров. Все это делалось, понятно, в масштабе. Ребята считали, что в 1 метре 1 километр.

Прежде всего необходимо ответить на вопрос: «Во сколько раз площадь острова меньше, чем площадь описанного прямоугольника?». Можно написать:

$$\frac{\text{площадь острова}}{\text{площадь прямоугольника}} = \frac{\text{площадь острова}}{500 \times 400}.$$

Наши робинзоны сообразили, что эта формула похожа на формулу вероятности. Нужно только сделать так, чтобы площадь острова была числом интересующих нас благоприятствующих случаев, а площадь прямоугольника — числом всех равновозможных случаев. Для этого каждый из двадцати восьми ребят по 10 раз подряд отошел от карты и затем, приблизившись к ней с закрытыми глазами, ткнул в нее пальцем. Сосчитали, сколько было случаев, когда палец попал в площадь острова (интересующие нас случаи), и сколько — в площадь всего прямоугольника, включая и вписанный в него остров (все возможные случаи).

Всего попаданий в остров было 140, а в прямоугольник попадали все во всех случаях: $10 \times 28 = 280$.

Теперь можно, с учетом формулы вероятности, написать:

$$\frac{\text{число благоприятствующих случаев}}{\text{общее число равновозможных случаев}} = \frac{\text{число попаданий в остров}}{\text{число попаданий в прямоугольник}} =$$

$$= \frac{140}{280} = \frac{\text{площадь острова}}{\text{площадь прямоугольника}} = \frac{\text{площадь острова}}{500 \times 400}.$$

Отсюда нетрудно найти:

$$\text{площадь острова} = \frac{140\times500\times400}{280} = 100\,000 \text{ квадратных метров} =$$

$$= 0{,}1 \text{ квадратного километра.}$$

Самая трудная задача состязания была решена.

МОНТЕ-КАРЛО

Впрочем, тут же, как всегда, появились сомневающиеся. А верно ли мы рассчитали площадь острова? Как проверить, что мы не ошиблись? Можно ли эту проверку сделать на необитаемом острове?

Оказалось, проверить правильность подобного расчета можно довольно интересным способом.

Кто-то из ребят тут же на песке нарисовал окружность радиусом в 1 метр и описал около нее квадрат. Сторона квадрата получилась равной двум метрам.

Затем все ребята повторили то, что делали с картой острова: с закрытыми глазами в случайных местах касались нового рисунка.

На этот раз оказалось, что всего в площадь круга ребята попали 220 раз, а во всю площадь квадрата — 280.

Знакомым путем произвели расчет площади круга.

$$\frac{\text{Площадь круга}}{\text{Площадь квадрата}} = \frac{\text{число попаданий в круг}}{\text{число попаданий в квадрат}} = \frac{220}{280}.$$

$$\text{Площадь круга} = \text{площадь квадрата} \times \frac{280}{220} = 2\times2\times\frac{220}{280} =$$

$$= 3{,}14 \text{ квадратных метра.}$$

Полученная цифра что-то напоминает. Да ведь это же замечательное число π! С его помощью можно рассчитать площадь круга любого радиуса. Если обозначить радиус круга буквой R, то площадь круга $= \pi R^2$.

При радиусе 1 метр площадь его должна быть равна:

$$\pi R^2 = 3{,}14\times1^2 = 3{,}14 \text{ квадратных метра.}$$

Все правильно. В этом и заключалась проверка. Теперь все увидели, что наш способ верен. Иначе откуда было бы

n — число попаданий в ○
m — ——— " ——— " ——— □

$$\frac{S_o}{S_\square} = \frac{n}{m} \Rightarrow S_o = S_\square \cdot \frac{n}{m}$$

2 м

2 м

$$\left.\begin{aligned} n &= 220 \\ m &= 280 \\ S_\square &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_o = 4 \cdot \frac{220}{280} \approx$$

$$\approx 3{,}14$$

$$\pi = 3{,}14159265358 97\ldots$$

$$\pi = \frac{C}{2R} \qquad S_o = \pi R^2$$

$$S_o = 3{,}14 \cdot 1^2 = 3{,}14$$

появиться замечательному числу π?

Способ, с помощью которого была рассчитана площадь острова, в арифметике случайностей называется Монте-Карло. Название свое он получил в честь города Монте-Карло, столицы княжества Монако, крошечного государства на юге Европы.

Город Монте-Карло славится своим игорным домом, в котором идет азартная игра в рулетку. Рулетка устроена наподобие волчка. Выигрыш и проигрыш зависят от того, где остановится волчок-рулетка, после того как его раскрутить.

Какое же отношение имеет умный способ расчета неизвестной площади к не очень умному способу убивания времени и денег в игорном доме?

На необитаемом острове для получения нужного результата был использован Случай. Случайным образом, попадая в пределы острова на карте, была определена его площадь. Немного раньше, по случайным предположениям о длине шага «землемера», была установлена его средняя ожидаемая величина.

Его Величество Случай царствует и в игорном доме Монте-Карло. Это он указывает рулетке, где остановиться.

В родственных связях со Случаем и заключается причина появления столь неожиданных на первый взгляд тезок по имени Монте-Карло.

Время на острове бежало незаметно. Вот уже подошел

день, когда робинзонов должны были снять с острова и доставить домой, на «Большую землю». Пароход ожидали примерно к восьми часам вечера.

Вечер наступил. Стемнело. Часов по условиям соревнования у ребят не было. Но очень хотелось узнать, скоро ли придет пароход. К счастью, такая задача уже не представляла для ребят особого труда. Ведь существует способ Монте-Карло!

Каждый быстро назвал то время, которое, как ему казалось, было в этот момент. Все назвали, конечно, разные числа. Но из этих случайных чисел нетрудно было получить среднее ожидаемое время. Для этого чи́сла сложили и разделили на число ребят — 28.

Пароход не заставил себя долго ждать.

* * *

Для того чтобы с помощью способа Монте-Карло измерить длину какого-нибудь предмета, определить площадь или оценить время, вовсе не обязательно забираться на необитаемый остров. Все это можно сделать прямо в классе, дома или на улице. Для таких измерений не нужно никаких приборов, кроме карандаша и листка бумаги, либо куска мела и классной доски. Арифметика случайностей к вашим услугам. Помните только, что и цифры, которые вы называете, должны быть случайными. А для этого давайте их независимо друг от друга.

Теория вероятностей поможет нам разобраться еще в одном любопытном деле.

КАК БОМБА МОГЛА ПОПАСТЬ В ЕДИНСТВЕННОГО В ЛЕНИНГРАДЕ СЛОНА?

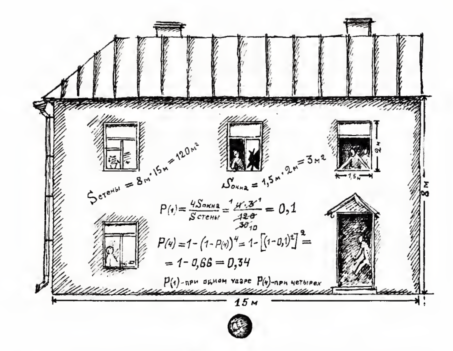
Есть у меня один юный приятель. Зовут его Вася.

Как-то раз Вася пришел ко мне очень расстроенный и поведал о том, что во время игры в футбол он попал мячом в окно.

Самое обидное то, что окна такие маленькие, и вот на́ тебе — прямо по стеклу...

Пришлось призвать в утешители теорию вероятностей.

— Какого примерно размера стена дома, та, где окно? — спросил я.



— Дом двухэтажный, метров восемь высоты и метров двадцать ширины.

— И сколько в нем окон?

— Всего четыре.

— Вот теперь давай и подсчитаем.

Площадь стены = 8 м $\times$ 15 м = 120 квадратных метров.

Будем считать, что

площадь окна = 1,5 м $\times$ 2 м = 3 квадратных метра.

А все 4 окна имеют площадь, равную:

3 кв. метра $\times$ 4 = 12 кв. метров.

Теперь подсчитаем вероятность попадания в окно при одном ударе мяча в направлении стенки.

Число всех равновозможных случаев — это площадь стены, а число благоприятствующих случаев, ведущих к попаданию в стекло, — площадь окон.

Вероятность попадания в стекло при одном ударе =

$$= \frac{\text{число благоприятствующих случаев}}{\text{общее число равновозможных случаев}} = \frac{12}{120} = 0{,}1.$$

— Сколько всего раз ты бил мячом в сторону стены за всю игру? — спросил я.

— Ну, раза четыре, — сказал Вася.

— Вот и считай. Вероятность выбить стекло хоть одним из этих ударов находится вот по такой довольно простой формуле теории вероятностей.

Вероятность попадания в стекло хотя бы один раз при четырех ударах =

= 1—(1 — вероятность попадания в стекло при одном ударе)^4.

Для того чтобы возвести то, что стоит в скобках, в четвертую степень, достаточно просто два раза подряд возвести это число в квадрат.

Вероятность попадания в стекло хотя бы один раз при четырех ударах =

$$= 1 - [(1-0{,}1)^2]^2 = 1-0{,}66 = 0{,}34.$$

Для приближенного расчета можно обойтись совсем уж простой формулой.

Вероятность попадания в стекло хотя бы один раз при четырех ударах =

= Вероятность попадания в стекло при одном ударе $\times 4 = 0{,}1 \times 4 = 0{,}4$, или 40%.

Вероятность получилась не очень большая, но ведь и бутерброд иногда падает маслом вверх.

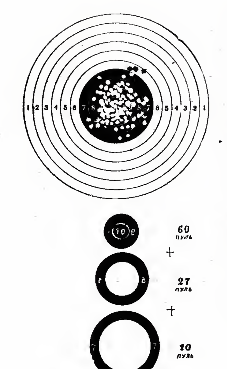
Вот ты и вышиб стекло. В полном соответствии с наукой.

Не знаю, мои расчеты или, может быть, расчеты Васиных родителей оказались столь убедительными, только я больше никогда не слыхал о битых окнах в нашем дворе.

Но с тех пор Вася проникся к теории вероятностей каким-то недобрым чувством.

И вот однажды прибежал он ко мне весь такой сияющий, довольный и прямо с порога выпалил:

— Разобрался я наконец в этой науке. Тоже мне теория! Вот был, говорят, во всем городе Ленинграде во время войны один слон, и надо же — именно в него попала бомба. Попробуйте-ка разделить площадь слона на площадь



Ленинграда — получится пшик, вероятность — нуль. А бомба все-таки попала. Вот вам и вероятность.

Я понял, что без небольшого урока по теории вероятностей не обойтись.

В ближайшее воскресенье я пригласил Васю в тир. Я знал, что он неплохой стрелок и любит это дело.

Действительно, Вася с удовольствием 100 раз подряд разрядил мелкокалиберную винтовку в мишень. Уходя, мы забрали мишень с собой, и я попросил Васю посчитать, сколько пробоин было сделано в каждом из колец мишени.

Подсчет не занял много времени:

— в «десятку» и «девятку» попало 60 пуль,
— в «восьмерку» попало 27 пуль,
— в «семерку» попало 10 пуль,
— в «шестерку» попало 3 пули.

Самым интересным здесь было то, что большая часть попаданий — 60 — оказалась в центральной, заштрихованной части мишени, которая по площади составляла лишь небольшую долю (около 16 процентов) от всей площади цели.

Это было как раз то, чего я и ожидал. Арифметика случайностей не подвела. Можно было приступать к уроку.

— Стрелять по мишени — это тебе не мячом стекла


0,03
0,1
0,27
0,6

бить, — начал я вместо вступления. — Когда вы играли в футбол, никто, конечно, не стремился специально попасть в стекло. Мяч ударялся о стенку в случайных местах равномерно по всей ее площади.

Другое дело — стрельба в цель. Стрелок старается попасть в «десятку», поэтому большинство пуль у хорошего стрелка и ложится вокруг центра мишени.

Чем дальше от «десятки», тем реже и реже можно встретить пробоину.

Как же, ты думаешь, в этом случае рассчитывается вероятность попасть в какой-нибудь круг мишени, например, в пределах «девятки»? Можно ли просто делить интересующую нас заштрихованную на рисунке площадь на площадь всей мишени?

Конечно, нет. Ведь мы уже говорили, что заштрихованная площадь составляет всего 16 процентов от площади мишени, в то время как по формуле вероятность попаданий будет равна:

$$\frac{\text{число попаданий в заштрихованную площадь}}{\text{число всех попаданий в мишень}} = \frac{60}{100} = 0{,}6, \text{ или } 60\%.$$

Итак, попадания в цель-десятку распределяются не равномерно по всей площади мишени. Попадание в кольцо, расположенное ближе к цели, более вероятно, чем в то, которое расположено дальше.

Теперь можно поговорить и о слоне, в которого попала бомба.

Вот карта того района Ленинграда, где находился зоопарк. Совсем рядом со слоном расположено несколько мостов. Мост — важный военный объект. Представим себе, что фашистские летчики целились в середину Кировского моста. Это место помечено на рисунке крестиком.

Тогда, как и при стрельбе по мишени, большая часть бомб (а их сбрасывали сотни и тысячи) взорвется где-то недалеко от моста. В это огненное кольцо — оно заштриховано на рисунке — попадает и наш слон.

Слон действительно погиб. В этом виноват, конечно, случай. Слон мог ведь и не погибнуть. Но гибель единственного в Ленинграде слона не посрамила теорию вероятностей. Наоборот, эта наука сумела объяснить, почему так произошло.

Но теория вероятностей умеет не только объяснять непонятные явления. Как и всякая настоящая наука, она обладает чудесным даром предвидения. И этот волшебный дар люди используют для свершения великих дел. Об этом — дальше.

Глава 7
СЛУЧАЙ ЗА РАБОТОЙ,



в которой делается ряд вещих предсказаний, раскрываются профессиональные секреты гадалок, выясняется, сколько нужно сшить мальчикам брюк и девочкам — платьев, а главное — неопровержимо доказывается, что пятилетний план будет выполнен, что бы ни случилось



«НО ВИЖУ ТВОЙ ЖРЕБИЙ НА СВЕТЛОМ ЧЕЛЕ»

Кто из нас не мечтал заглянуть в завтрашний день?

Предсказание будущего, предвидение грядущих событий всегда было заветной мечтой людей.

«Скажи мне, кудесник, любимец богов, что сбудется в жизни со мною?» — вопрошает мудрого старца князь Олег. Мы все помним, к чему привело князя желание заглянуть в грядущее.

По-настоящему предсказывать будущее умеет только наука. Обычная арифметика, например, предсказывает, сколько достанется яблок каждому из трех ребят, если у них на всех шесть яблок. Физика предсказывает, что случится с водой, если нагреть ее до температуры 100°.

А вот теория вероятностей — может предсказать, как поведет себя случай, каков будет в среднем результат того или иного случайного явления.

И все эти научные предсказания можно проверить — сбудутся ли они.

Давайте же попробуем научиться предсказывать результаты некоторых случайностей, встречающихся в нашей жизни. А для того чтобы иметь возможность проверить правильность наших предвидений, выберем такие случаи, исход которых легко установить.

Прежде всего раздобудьте сто любых билетов. Годятся билеты трамвайные, троллейбусные, автобусные и даже билеты в кино. Номера билетов, конечно, будут самые разнообразные. Нужно только, чтобы каждый из них состоял из шести цифр.

Уложив эти билеты в любом порядке, мы можем считать, что все их номера случайны. Вот с этими-то случайностями мы и будем иметь дело.

Вооружившись пачкой билетов, приступим к работе.

Предсказание первое. Сколько всего окажется в пачке билетов с четной цифрой в конце номера?

Часть номеров билетов оканчивается на четные числа, а часть — на нечетные. Всего может быть десять разных однозначных цифр. Если считать ноль четным числом, тех и других цифр будет по пять — поровну.

Требуется предсказать, сколько всего в нашей пачке билетов, оканчивающихся на четную цифру (сокращенно — четных билетов).

Думаю, что это предсказание все сделают одинаково. А именно — по формуле вероятности:

$$\text{Вероятность появления четного билета} =$$

$$= \frac{\text{число благоприятствующих случаев}}{\text{общее число равновозможных случаев}} = \frac{5}{10} = 0{,}5.$$

$$\text{МО числа четных билетов} = 100 \times 0{,}5 = 50 \text{ билетов.}$$

Остается произвести проверку. В своей пачке вы наверняка найдете примерно 50 четных билетов.

Я говорю «примерно» потому, что мы получили математическое ожидание (МО), или среднеожидаемое число билетов. У одного из вас может быть немного больше четных билетов, чем 50, у другого меньше, но больших ошибок в нашем предсказании не будет.

Предсказание второе. Сколько окажется четных билетов в любом количестве билетов, взятых наугад из пачки? Возьмем из пачки наугад несколько билетов. Часть из них может оказаться четными, а часть — нечетными.

Требуется предсказать, какое следует ожидать число билетов с четными номерами.

Мы знаем, что вероятность быть четным (или нечетным) для одного билета равна 0,5.

Нам известно также, как рассчитать вероятность два раза подряд вытянуть четный (или нечетный) билет.

Она, по теореме умножения вероятностей, равна $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$, или 25%.

Вероятность три раза подряд вытянуть четный билет равна $0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}125$, или 12,5%.

Таким путем можно составить интересную таблицу вероятностей появления различного числа четных билетов. Вот она.

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ ЧЕТНЫХ БИЛЕТОВ (В ПРОЦЕНТАХ)

Предсказанное количество появлений четных билетов	Количество вытянутых билетов				
	1	2	3	4	5
0	50	25	12,5	6,2	3,1
1	50	50	37,5	25	15,6
2	0	25	37,5	37,5	31,2
3	0	0	12,5	25	31,2
4	0	0	0	6,2	15,6
5	0	0	0	0	3,1

Например, мы вытянули из пачки наугад 5 любых билетов и предсказываем, что среди них 2 билета четных. Так вот, вероятность такого предсказания равна 31,2 процента.

Из этой таблицы видно, что точно предсказать, какое количество из вытянутых наугад билетов окажется четными, нельзя — все вероятности этих событий меньше 50%.

Но зато можно сказать, какое количество четных билетов из числа вынутых наиболее вероятно. Например, если мы взяли 5 билетов, то наиболее вероятно, что 2 из них будут четными, а 3 нечетными (или наоборот).

Можно также сказать, что весьма маловероятно вытянуть подряд 4 или, тем более, 5 четных билетов.

Такие ответы, конечно, мало похожи на настоящие пророчества. Поэтому давайте несколько изменим смысл предсказания.

Будем предсказывать, не сколько будет точно четных билетов, а не менее какого количества четных (или нечетных) билетов содержится среди вытянутых нами из пачки. Помните задачу «В какой руке?». Для этого нам понадобится специальная таблица, рассчитанная по правилам теории вероятностей.

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ
НЕ МЕНЕЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ЧИСЛА ЧЕТНЫХ БИЛЕТОВ
(В ПРОЦЕНТАХ)

Предсказанное количество появлений четных билетов не менее	Количество вытянутых билетов				
	1	2	3	4	5
0	100	100	100	100	100
1	50	75	87,5	83,8	96,9
2	0	25	50	68,8	81,2
3	0	0	12,5	31,2	50
4	0	0	0	6,2	8,8
5	0	0	0	0	3,1

Например, мы вытянули из пачки наугад 5 любых билетов и предсказываем, что среди них не менее двух билетов — четных. Оказывается, вероятность такого предсказания, как видно из таблицы, очень большая — 81,2 процента. Подобное предсказание уже можно делать без опасения, что оно не сбудется.

Сделаем с помощью этой таблицы несколько смелых предсказаний.

Можно, например, утверждать, что из трех наугад вытянутых билетов не менее чем один будет четным, а из пяти — четными будут не менее двух билетов.

Эти предсказания можете легко проверить сами.

Между прочим, с помощью этой нехитрой таблицы мож-

но приподнять завесу тумана, прикрывающую «деятельность» всевозможных гадалок и прорицателей. Предположим, гадалка предсказала пять некоторых событий, которые в равной мере могут как произойти, так и не произойти, — точно также, как в равной степени могут появляться четные или нечетные билеты. Это может быть, например, «приятная встреча», «лихой недуг», «дальняя дорога» и тому подобное.

Вероятность того, что сбудутся все пять событий, ничтожно мала — всего 3,1 процента. Но легковерному человеку вполне достаточно, если случится хотя бы не менее двух — трех из них. А такое количество сбывшихся пророчеств — то есть вытянутых четных билетов — происходит с высокой вероятностью — до 81,2 процента.

И вот часть сделанных гадалкой предсказаний сбывается, а темные люди и не подозревают, что приобщились к «таинствам» теории вероятностей.

Предсказание третье. Сколько нужно взять наугад билетов из пачки, чтобы среди них оказался и «счастливый?» Самым «счастливым» билетом, как известно, считается такой, в котором суммы трех первых и трех последних цифр равны. Все, конечно, понимают, что это чепуха, но почему-то некоторые очень внимательно рассматривают свои кусочки бумаги с шестизначным номером...

Так вот, требуется предсказать, сколько нужно взять билетов, чтобы добраться до «счастливого».

Для того чтобы каждый смог подсчитывать необходимое количество билетов, в которых попадается «счастье», воспользуемся еще одной таблицей, которую дает нам арифметика случайностей.

Для того чтобы «войти» в эту таблицу, нужно прежде всего знать вероятность счастливого билета.

Рассчитать самим эту вероятность довольно сложно. Поэтому воспользуемся готовым результатом: для наших условий вероятность вытянуть «счастливый» билет равна примерно 5,5 процента. Эта цифра означает, что в среднем на 100 билетов 5—6 номеров окажутся «счастливыми». Вы можете это легко проверить, перебрав свою пачку билетов, а также пачки товарищей.

Второе, что нам нужно знать, чтобы воспользоваться таблицей, — это желаемую вероятность вытянуть «счастливый» билет.

Узнать ее проще простого. Какую хочешь получить вероятность — та и будет желаемая. Если вы очень хотите быть счастливыми — получить «счастливый» билет почти наверняка, — берите 80 и 90 процентов, если у вас желания более скромные — ограничьтесь меньшей вероятностью.

Но только имейте в виду, что чем выше желаемая вероятность, тем больше билетов придется перебрать, прежде чем найдется «счастье».

Вот пример.

Вероятность «счастливого» билета, как мы уже знаем, равна примерно пяти процентам. Если вас устраивает желаемая вероятность 50 процентов, то, как видно из таблицы, можно ограничиться четырнадцатью билетами. Если же вы желаете получить «счастливый» билет с вероятностью 80 процентов — надо будет просмотреть 31 билет.

Цифры 14 и 31 стоят в таблице на пересечении желаемой вероятности и вероятности «счастливого» билета.

Проверить это предсказание нетрудно. Просто возьмите

СКОЛЬКО НУЖНО ВЫТЯНУТЬ БИЛЕТОВ,
ЧТОБЫ ХОТЯ БЫ ОДИН ИЗ НИХ БЫЛ «СЧАСТЛИВЫМ»?

Вероятность «счастливого» билета	Желаемая вероятность взять «счастливый» билет										
	5%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	около 100%
5%	1	2	4	7	10	14	18	24	31	45	76
10%	—	1	2	3	4	7	8	11	15	22	37
20%	—	—	1	2	2	3	4	6	7	10	17
30%	—	—	—	1	1	2	3	3	5	6	11
40%	—	—	—	—	1	1	2	2	3	4	8
50%	—	—	—	—	—	1	1	2	2	3	6
60%	—	—	—	—	—	—	1	1	2	2	4
70%	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	3
80%	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2
90%	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2
около 100%	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1

из пачки наугад 31 билет и проверьте. Один из них почти наверняка будет счастливым.

Если же у вас нет своей пачки билетов, не беда. Можете просто замечать номера тех билетов, которые вы берете в трамвае, троллейбусе, автобусе. На 31 билет с высокой вероятностью 80 процентов хотя бы один билет должен быть «счастливым».

Третье предсказание, так же, как и предыдущее, годится, конечно, не только для игры с билетами.

Вы можете немало удивить своих друзей, если уверенно предскажете, например, сколько нужно взять лотерейных билетов, чтобы обязательно получить выигрыш.

Представим, что на школьном вечере устроили лотерею. Сделано всего 250 билетов. Известно, что из них 50 содержат выигрыш, а остальные 200 — пустые.

Вы решили выиграть во что бы то ни стало хоть один раз. Вот как это нужно сделать.

Сначала определим вероятность выигрыша — вероятность «счастливого» билета. Она равна $\frac{50}{250}=0{,}2$, или двадцати процентам.

Затем установим желаемую вероятность вытянуть «счастье». Чтобы случай не подкачал, возьмем ее побольше — 90 процентов.

«Входим» с этими вероятностями в таблицу и получаем на пересечении количество билетов — 10. Теперь покупайте 10 билетов и можете быть уверены, что один из них почти обязательно выиграет.

Таким же путем можно высчитать, и сколько нужно иметь лотерейных билетов, чтобы наверняка выиграть автомобиль. Боюсь только, что этих билетов потребуется немало.

А вот еще один пример, который, возможно, пригодится в трудную минуту.

Вы написали сочинение по литературе или решили несколько сложных задач по математике на экзамене и сомневаетесь, нет ли ошибок.

Сколько раз нужно проверить работу, чтобы быть уверенным в успехе?

Снова обратимся к таблице. Каждый сумеет примерно оценить свои возможности находить ошибки при однократном просмотре работы. Положим, вы за один раз обычно

вылавливаете только половину ошибок — 50 процентов. Тогда для того, чтобы желаемая вероятность успеха была 80 процентов, нужно проверить работу два раза (что, кстати говоря, хорошие ученики и делают).

А тот, кто при вероятности ошибки 50 процентов проверяет свою работу только один раз, может рассчитывать на успех лишь с вероятностью 60 процентов. Это тоже показывает наша таблица.

Итак, мы убедились, что предсказания теории вероятностей сбываются. Давайте теперь посмотрим, как человек использует этот волшебный дар предвидения случайного, дар, которым вооружает его наука.

А ВДРУГ?..

В газетах опубликован новый пятилетний план.

Все мы теперь знаем, сколько наша страна будет производить зерна, добывать полезных ископаемых, шить одежды и обуви, создавать различных машин и приборов.

Мы уверены, что план у нас правильный и он будет обязательно выполнен. Точно так же, как выполнялись и перевыполнялись все пятилетние планы.

Мы убеждены в возможности выполнения плана потому, что его продумали и рассчитали с помощью науки. Над составлением плана трудились ученые разных специальностей: металлурги и агрономы, географы и ботаники, химики и математики. Не последнюю роль при обосновании плана играла и теория вероятностей — наука о случае.

На первый взгляд непонятно, что общего между планом и случаем. Наоборот, кажется, что там, где есть план, — нечего говорить о случайном.

Так ли обстоит дело? Давайте попробуем в этом разобраться.

Все, что записано в плане: и урожай зерна, и производство металла, и качество приборов и машин — во многом зависит от случая. Ведь никто заранее не может точно сказать, какая будет погода во время уборки хлеба или сколько металла окажется в руде.

Неизвестно также точно, сколько необходимо брюк для мальчиков и платьев для девочек. Никто не может угадать точно, какое количество мужской обуви сорокового размера

должно быть в магазинах. Неизвестно, сколько приборов и машин окажутся неисправными и потребуют замены или ремонта.

А вдруг погода будет плохая, и часть урожая не удастся вырастить или собрать? А вдруг руда окажется беднее, чем ожидали, и металла из нее получится меньше, чем предполагалось? А вдруг?

Слово «вдруг» звучит тогда, когда что-то происходит неожиданным, случайным для нас образом.

Например, говорят: «Вдруг пошел дождь». Значит, это явление природы могло как произойти, так и не произойти.

Своенравный случай всегда действует неожиданно для человека, и точно предугадать каждый отдельный его результат невозможно. Попробуйте-ка точно предсказать, как сейчас упадет бутерброд! Но мы уже знаем и видели много примеров того, что случайные явления вполне поддаются изучению, делаются достоянием науки.

Наука поможет нам ответить и на вопрос «а вдруг?..».

ЧТО БЫ НИ СЛУЧИЛОСЬ!

Для того чтобы теория вероятностей могла заниматься расчетами плана, нужно снабдить ее необходимым сырьем — цифрами, показывающими, как часто происходят интересующие нас случайные события.

Вспомните, как мы разгадывали тайну шифра. Вначале нам потребовалось узнать, с какой частотой встречается каждая буква алфавита в различных книгах, и лишь потом мы сумели раскрыть, что прячется за таинственными знаками письма.

Сбор и обработка необходимого сырья для расчетов плана производится с помощью особой науки — статистики.

Говорят, что статистика знает все:

— сколько бывает солнечных и дождливых дней каждый год;

— сколько, в среднем, приходится металла на тонну руды;

— сколько ежегодно рождается мальчиков и девочек;

— сколько процентов девушек высокого роста;

— какой процент мужчин носит обувь сорокового размера;

— какие части прибора или машины выходят из строя и как часто. И так далее.

Свой результат статистика получает по очень похожей на уже известную нам формуле:

$$\text{Частота события} = \frac{\text{число интересующих нас благоприятствующих случаев}}{\text{число всех проверенных равновозможных случаев}}.$$

Эту-то частоту при большом числе проверенных событий и принимают за вероятность. А уж как обращаться с вероятностями, мы знаем.

Давайте же посмотрим, как теория вероятностей работает над планом.

Например, статистика установила, что при хорошей погоде урожай пшеницы в совхозе «Октябрьский» составляет в среднем 40 центнеров с гектара. Установлено также, что хорошая погода, нужная для созревания и уборки пшеницы, бывает в том районе страны, где находится совхоз, два года из трех. Под пшеницу отведено 300 гектаров. Как рассчитать план производства зерна в совхозе на пять лет?

Вспоминаем, что нам известно о вероятности и математическом ожидании (*МО*).

$$\text{Вероятность хорошей погоды} = \frac{2}{3} = 0{,}67.$$

$$\textit{МО} \text{ урожая за 1 год с 1 гектара} = 40 \times 0{,}67 = 26{,}8 \text{ центнера.}$$

$$\textit{МО} \text{ урожая за 1 год с 300 гектаров} = 26{,}8 \times 300 = 8040 \text{ центнеров.}$$

$$\textit{МО} \text{ урожая за пятилетку с 300 гектаров} = 8040 \times 5 = 40200 \text{ центнеров.}$$

А вот история еще одной цифры плана.

Установлено среднее содержание металла в руде одного из месторождений: на каждую тонну руды приходится в среднем 50 килограммов меди и 20 килограммов свинца.

В год месторождение дает около 200 000 тонн руды. Необходимо запланировать, сколько всего тонн цветного металла (меди и свинца вместе) даст месторождение за пятилетку.

Рассчитываем:

$$\text{Вероятность нахождения меди в руде} = \frac{50}{1000} = 0{,}05.$$

$$\text{Вероятность нахождения свинца в руде} = \frac{20}{1000} = 0{,}02.$$

Вероятность нахождения цветного металла в руде (или меди, или свинца) $= 0{,}05 + 0{,}02 = 0{,}07$.

МО получения цветного металла за 1 год $= 200\,000 \times 0{,}07 = 14\,000$ тонн.

МО получения цветного металла за пятилетку $= 14\,000 \times 5 = 70\,000$ тонн.

Интересно также разобраться, откуда заранее известно, сколько нужно сшить брюк и сколько платьев. Ведь число мальчиков и девочек случайно. Даже в разных классах количество мальчиков и девочек не одинаково.

И тут на помощь приходит статистика. Подсчитано, что 51 процент всех рождающихся ребят обычно составляют мальчики, а остальные 49 процентов — девочки.

Значит, из 1000 единиц детской одежды должно быть:

МО брюк $= 1000 \times 0{,}51 = 510$ пар брюк.

МО платьев $= 1000 \times 0{,}49 = 490$ платьев.

А какого размера должна быть одежда и обувь?

Вот, скажем, какая часть платьев должна шиться для девушек высокого роста?

И на этот, казалось бы, совсем уж фантастический вопрос уверенно отвечает статистика в союзе с теорией вероятностей.

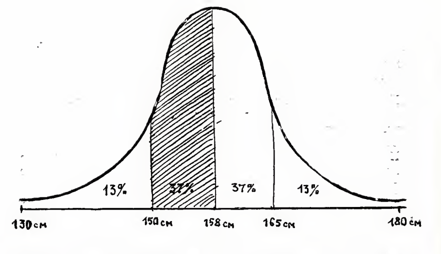
Несколько лет назад статистики не поленились и измерили рост у большой группы — больше тысячи девушек, только что окончивших школу. По этим данным была рассчитана так называемая кривая статистического распределения роста девушек. Она показана на рисунке.

На горизонтальной оси — рост девушек начиная с самых миниатюрных — 135 сантиметров — и вплоть до стоящих на правом фланге — 180 сантиметров.

Кривая распределения рассчитана так, что площади между ней и горизонтальной осью соответствуют проценту девушек, рост которых находится в тех или иных пределах, показанных на графике.

Например, площадь заштрихованной на рисунке фигуры составляет 37 процентов от общей площади под кривой и соответствует росту девушек от 150 до 158 сантиметров. Это означает, что 37 процентов девушек имеют рост именно в этих пределах.

Теперь уже закройщикам не трудно принять решение —



процент платьев различной длины не должен сильно отличаться от тех цифр, которые дает график.

Точно так же можно запланировать и количество обуви какого-нибудь определенного размера — например, мужских ботинок сорокового размера.

Устанавливается, что в среднем из 100 мужчин 30 имеют сороковой размер. Это значит, что:

$$\text{Вероятность покупки мужской обуви сорокового размера} = \frac{30}{100} = 0{,}3.$$

А из готовящейся по плану партии мужской обуви в 10 000 пар должно быть:

$$\textit{МО}\ \text{количества пар мужской обуви сорокового размера} = 10\,000 \times 0{,}3 = 3000\ \text{пар.}$$

Ну, а как же спланировать производство приборов и машин с учетом того, что они по случайным причинам могут выходить из строя и требовать замены или ремонта?

Чтобы разговаривать было проще, возьмем обыкновенную электрическую лампочку. Без этого нехитрого прибора современный человек не мыслит нормальной жизни.

Сколько же нужно запланировать электролампочек на пятилетку с учетом того, что некоторая часть их, безусловно, перегорит?

Подсчитаем количество лампочек для одной школы.

Прежде всего необходимо установить, какова вероятность выхода лампочки из строя за пятилетку. Эту цифру нам дает вездесущая статистика. Возьмем ее равной 0,4. Установим также, с какой вероятностью мы хотим иметь электрическое освещение.

Чтобы быть уверенными в том, что у нас всегда по вечерам будет свет, примем ее равной 80 процентам.

Теперь с помощью таблицы на пересечении 40% и 80% мы легко находим цифру 3. Здесь это число означает количество лампочек, из которых хоть одна будет гореть с желаемой вероятностью.

Итак, из трех ламп будет уверенно работать в течение пяти лет лишь одна. Поэтому, если у нас в школе одновременно должно гореть 100 лампочек, то всего на пятилетку нужно запланировать их в три раза больше — 300 штук.

В каждом плане отводится место и задачам обороны нашей Родины от врагов. Попробуем сделать один из расчетов такого рода.

Для того чтобы поразить важный военный объект противника, который осмелится развязать против нас войну, необходимо попасть в него хотя бы одной ракетой. Вероятность попадания ракеты в цель установлена при стрельбе по мишени и равна 60 процентам. Сколько нужно выпустить ракет, чтобы военный объект врага был уничтожен?

Раз объект важный, возьмем желаемую вероятность равной, например, 90 процентам. Тогда в таблице на пересечении вероятностей 60% и 90% найдем необходимое число ракет. Их требуется всего две. И мы можем быть уверены, что врагу не уйти от поражения.

Итак, если все заранее правильно учесть и рассчитать, пользоваться проверенными цифрами, которые дает статистика, то никакие случайности нашему плану не опасны.

План с помощью науки учитывает и переменчивость погоды, и неожиданные изменения в составе руды, и даже не подвластное человеку рождение петушков и курочек. И никакие «а вдруг?» нашему плану не страшны.

* * *

Пятилетний план ставит перед советской наукой ряд важных задач. Многие из них связаны с различными ви-

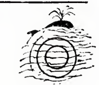
дами поиска. Планируется поиск полезных ископаемых и лекарственных растений, рыбы и морского зверя. Поиск ведут археологи и историки, физики и биологи.

Теория вероятностей к задаче поиска имеет самое непосредственное отношение.

Глава 8
Я ИДУ ИСКАТЬ,



в которой мы отправляемся на поиски клада Наполеона и морских мин, встречаемся с лесничим и китобоями, а в заключение... играем в футбол



ЗАБОТЫ ИСКАТЕЛЕЙ КЛАДОВ

Людям самых различных профессий приходится заниматься поиском. Геологи ищут полезные ископаемые, рыбаки — рыбу, китобои — китов.

Наука о том, как искать, называется теорией поиска. Основа теории поиска — арифметика случайностей. С одной из задач этой теории нас уже познакомил Том Сойер.

К сожалению, не всегда можно вести поиск по методу Тома Сойера...

По заброшенной лесной дороге двигалось несколько крытых автомашин-вездеходов. Они остановились у небольшого озера, спрятавшегося в глубине леса. Из машин вышли люди. На берег озера с помощью специальных приспособлений сгрузили какие-то механизмы, отдаленно напоминающие пожарные насосы. Стали собирать плот. Во время работы люди переговаривались. Несколько раз упоминалось имя Наполеона.

Вот плот с людьми спустили на воду, погрузили на него насосы и с помощью небольшого катера отбуксировали на середину озера. Один из находившихся на плоту людей

с помощью своих товарищей надел костюм из толстой резины, ботинки со свинцовыми подошвами, блестящий медный шлем. Еще минута — и водолаз ушел под воду. Заработал насос, подавая ему воздух.

Так несколько лет тому назад начались поиски клада Наполеона Бонапарта.

Более ста пятидесяти лет существует легенда о том, что Наполеон во время бегства из России будто бы вынужден был спрятать на дне глубокого лесного озера свои богатства. Сокровища эти, по воспоминаниям очевидцев, на нескольких санях в заколоченных ящиках привезли к озеру, скрытому в лесной чаще. Дело было зимой. Ящики с сокровищами спустили под лед в тайном месте.

Как искать этот клад?

Даже если бы имелись точно такие же ящики, какие были у Наполеона, то все равно мы не смогли бы послать их на поиск («Брат, поди сыщи брата»), так как не знаем даже приблизительно места, где ящики столкнули под лед.

Экспедиция, о которой только что шел рассказ, вела поиск так. Водолаз с плота спускался под воду и просматривал небольшой участок дна озера, затем плот переводили на другое место, снова спускали водолаза, и так много раз.

Эта нелегкая работа продолжалась довольно долго, но клад так и не нашли.

Давайте с помощью теории поиска попытаемся установить причину неудачи искателей клада. Для этого определим, какова вероятность обнаружения клада при том способе поиска, который применялся.

Вначале найдем вероятность того, что клад мог быть обнаружен при первом же погружении водолаза в любой случайной точке озера.

В этом случае вероятность обнаружения клада может быть получена по известной нам формуле вероятности путем деления площади, занимаемой кладом, на площадь всего озера.

Если принять, что облюбованное Наполеоном озеро представляло собой круг с радиусом в 1 километр, а сокровища были упакованы в 10 ящиков длиной в 2 и шириной в 1 метр каждый, то вот чему будет равна вероятность обнаружения клада при первом же погружении водолаза в любой точке озера:

$$\text{вероятность обнаружения клада} =$$
$$= \frac{\text{площадь клада}}{\text{площадь озера}} = \frac{10 \times 2 \times 1}{3{,}14 \times 1000^2} = \frac{20 \text{ кв. метров}}{3\,140\,000 \text{ кв. метров}}$$
$$= 0{,}000006, \text{ или } 0{,}0006\%.$$

Полученная нами вероятность обнаружения примерно столь же мала, как, скажем, вероятность того, что первый же встреченный в большом городе человек окажется твоим однофамильцем. В жизни рассчитывать на такую случайность, конечно, нельзя. Поэтому водолазу пришлось погружаться в воду многократно.

Рассчитанная вероятность обнаружения клада верна для одного погружения водолаза. Если произвести много погружений, то вероятность, конечно, возрастет. Приближенно можно считать, что она увеличится во столько раз, во сколько раз больше будет погружений. Это означает, что для того чтобы получить вероятность обнаружения, скажем, около 60 процентов (немногим более половины), водолаз должен опуститься на дно примерно 10 000 раз. Даже если он делает два погружения в день и работает без выходных, на поиск уйдет около 14 лет.

Вот как сложно вести поиск. Это и есть, видно, одна из главных причин того, что клад Наполеона до сих пор лежит на дне озера (если он там действительно лежит).

Что же все-таки посоветовать искателям клада?

Оказывается, их труд можно существенно облегчить. Для этого нужно, во-первых, иметь хорошие средства для наблюдения под водой — например, мощный прожектор, а во-вторых, снабдить водолаза специальным облегченным скафандром с буксирующим устройством, которое даст ему возможность быстро двигаться и вести поиск на ходу.

Если наш водолаз сможет просматривать под водой освещенную прожектором полосу шириной в 20 метров и делать это на ходу со скоростью 5 километров в час, то только за 10 часов он сможет обследовать площадь, равную $20 \times 5000 \times 10 = 1\,000\,000$ кв. метров.

Вероятность обнаружения клада при этом равна:

$$\frac{\text{обследуемая площадь}}{\text{площадь озера}} = \frac{1000000}{3140000} = 0{,}32, \text{ или } 32\%.$$

За 20 часов работы вероятность перевалит за 60 процентов, и появится реальная надежда, что клад будет обнаружен.

Рассказ об искателях клада Наполеона позволил нам познакомиться с некоторыми интересными возможностями теории поиска. Но у этой науки есть и другие, не менее любопытные задачи.

КУДА СМОТРЕТЬ ВПЕРЕДСМОТРЯЩЕМУ?

Впервые я столкнулся с теорией поиска при следующих необычных обстоятельствах. Я начинал морскую службу офицером на большом военном корабле. Только что окончилась война. Море еще было полно плавающих мин.

В первом же походе командир корабля решил организовать наблюдение за минами. Наблюдение должны были вести двенадцать самых внимательных, самых зорких матросов. Мне командир поручил расставить наблюдателей по палубе корабля так, чтобы ни одна мина вокруг корабля не оставалась незамеченной.

Недолго думая я начертил мелом посредине палубы корабля окружность и разбил ее на двенадцать частей, по одной части на каждого наблюдателя. Мне казалось, что при такой расстановке весь горизонт будет осматриваться равномерно и все мины будут обнаружены.

Свой план я изложил командиру корабля.

Командир подумал и сказал:

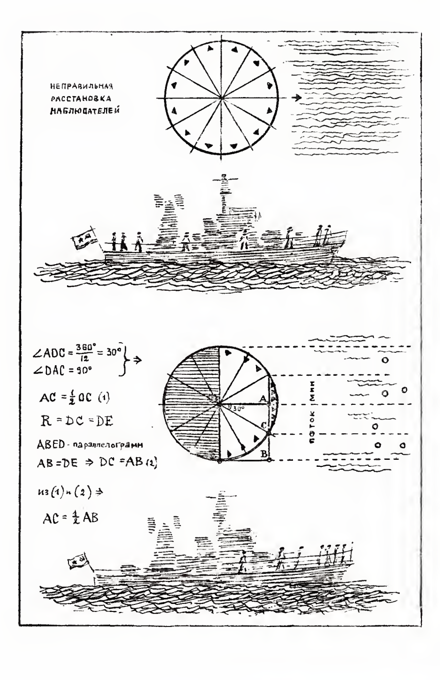
— Если бы наблюдение за минами велось с неподвижного корабля, ваш план был бы безупречен. Но ведь корабль идет. Это меняет дело.

Командир взял мел и нарисовал на палубе несколько пунктирных линий, а между ними — стрелки.

— Представим себе, — сказал командир, — что наш корабль стоит, а мины плывут ему навстречу так, как показывают стрелки. Такая замена вполне допустима: ведь когда мы смотрим с корабля на воду, нам кажется, что вода и все, что на ней находится, движется, а корабль стоит.

Разделим все мины, которые идут навстречу кораблю, на четыре равные по ширине потока. — Командир показал на свой рисунок. — В каждом потоке будет теперь четверть всех мин, угрожающих кораблю. Давайте посмотрим, в каких секторах наблюдатели обнаружат эти мины.

Те мины, которые идут в потоках по обе стороны от середины корабля, очевидно булут сразу же замечены наблю-


НЕПРАВИЛЬНАЯ
РАССТАНОВКА
НАБЛЮДАТЕЛЕЙ
$\angle ADC = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$
$\angle DAC = 90^\circ$
⇒
$AC = \frac{1}{2} DC$ (1)
$R = DC = DE$
ABED - параллелограмм
$AB = DE \Rightarrow DC = AB$ (2)
из (1) и (2) ⇒
$AC = \frac{1}{2} AB$
A
B
C
30°
ПОТОК МИН

дателями секторов 1 и 12: каждый из них обнаружит по одной четверти всех мин.

Наблюдателям, находящимся дальше от середины корабля, в секторах 2 и 3, 11 и 10, «повезет» меньше: ведь здесь четверть всех мин будет приходиться на два сектора.

Это нетрудно доказать. Докажем сначала, что отрезок $AC = \frac{1}{2}AB$.

Действительно, AC — катет, DC — гипотенуза, а угол $ADC = \frac{360}{12} = 30°$.

Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы:

$$AC = \frac{1}{2}DC.$$

Отрезки DC и DE равны как радиусы одной и той же окружности, а DE равен AB по построению. Значит, $DC = AB$.

Следовательно, $AC = \frac{1}{2}AB$.

— Что и требовалось доказать, — невольно закончил я. Теперь мне стала ясна моя ошибка. Поскольку в разных секторах будет появляться различное количество мин, значит, равномерная расстановка наблюдателей, по одному в каждом секторе, не годится.

— План наблюдения должен быть таким. — Я снова взял мел. — Всех наблюдателей мы разделим на четыре группы, по числу потоков мин; тогда на каждый поток придется по три наблюдателя (12:4): в секторах 1 и 12 по 3 человека в каждом; в секторах 2 и 3, 11 и 10 — по 3 человека на два сектора; в сектора от 3 до 9 наблюдатели не назначаются. Основное наблюдение, таким образом, будет вестись по направлению движения корабля.

Командир улыбнулся.

— Ну вот, — сказал он, — теперь мы знаем, почему впередсмотрящий должен смотреть главным образом вперед.

ПОЖАР В ЛЕСУ

О своем первом уроке по теории поиска я рассказал както знакомому лесничему.

— У нас тоже без этой науки не обойтись, — сказал

он, внимательно выслушав меня. — Вот пример. В связи с засушливым летом в лесах нередко создается пожароопасная обстановка. Приходится вести постоянное наблюдение за большими районами леса. В нашем деле важно правильно рассчитать, на каком расстоянии должны стоять наблюдательные посты, чтобы не проглядеть очаг пожара. Задача эта решается так.

У каждого дежурного есть бинокль, с помощью которого он ведет наблюдение. Предположим, что наименьшее расстояние, с которого можно заметить дым в бинокль, — около трех километров. Как расставить посты?

На первый взгляд кажется, что задача очень простая: если наблюдатели будут находиться на расстоянии шести километров друг от друга, то они смогут просматривать все пространство между смежными постами ($3 \times 2 = 6$), и очаг пожара не останется незамеченным.

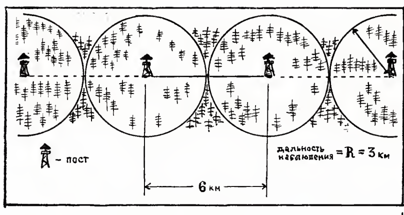
При более внимательном подходе, однако, такое расположение постов не может считаться наилучшим.

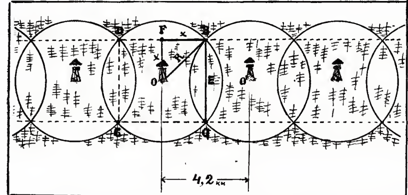
Посмотрим на этот рисунок. — Мой товарищ взял лист бумаги и быстро набросал схему расположения наблюдателей. — Оказывается, если расстояние между постами принять равным двум дальностям наблюдения — шести километрам, — то сплошной просмотр пространства между постами будет только в одной его точке A — там, где происходит касание окружностей наблюдения. Стоит огню возникнуть за пределами этой точки, и к моменту обнаружения пожар может сильно разрастись.

Чтобы этого не случилось, нужно расположить наблюдательные посты так... — Лесничий нарисовал еще одну картину пониже первой. — Видишь, мы сдвинем посты таким образом, чтобы у нас получилась сплошная ровная полоса наблюдения. При этом области наблюдения соседних постов соприкасаются уже не в точках, как было раньше, а в линиях. На рисунке я показал одну из таких линий — BG. Нетрудно сообразить, что эта линия должна быть одной из сторон квадрата, вписанного в окружность наблюдения. Ибо только в этом случае полоса наблюдения будет состоять из одинаковых квадратов и поэтому получится сплошной и ровной.

Чему же теперь равно расстояние между соседними постами?

Если мы обозначим половину этого расстояния буквой





CDBG - квадрат $\left. \begin{aligned} FB &= \frac{DB}{2} \\ x &= FB \end{aligned} \right\}$ DFBE - квадрат $\Rightarrow FB = DF = x$

$OF^2 + FB^2 = OB^2$; $x^2 + x^2 = 3^2$; $2x^2 = 3^2$; $x^2 = \frac{3^2}{2}$; $x = \sqrt{\frac{3^2}{2}}$

$x = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{3^2} \approx 0{,}7 \cdot 3 \Rightarrow OO' = 2x = 2 \cdot 0{,}7 \cdot 3 = 1{,}4 \cdot 3 = 4{,}2$ км

расстояние между постами $\leq 1{,}4$ дальности наблюдения

x, то, вспомнив теорему Пифагора и сообразив, что $x = FB = FO$, сразу напишем:

$$x^2 + x^2 = 3^2; \quad 2x^2 = 3^2;$$

$$x^2 = \frac{3^2}{2}; \quad x = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{3^2} \approx 0,7 \times 3.$$

Расстояние между постами $= 2x =$
$= 2 \times 0,7 \times 3 = 1,4 \times 3 = 4,2$ километра.

С тех пор я запомнил еще одно правило теории поиска: хочешь надежно обнаруживать, — расставь посты на удалениях один от другого не больше чем 1,4 дальности наблюдения.

КАК ИСКАТЬ КИТА?

Во всех задачах поиска, о которых шла речь, была одна особенность. Либо то, что искали, либо те, кто искал, оставались на месте. Клад тихо лежал на дне озера, мины колыхались в одной и той же точке на поверхности моря, лесничие замерли на своих постах.

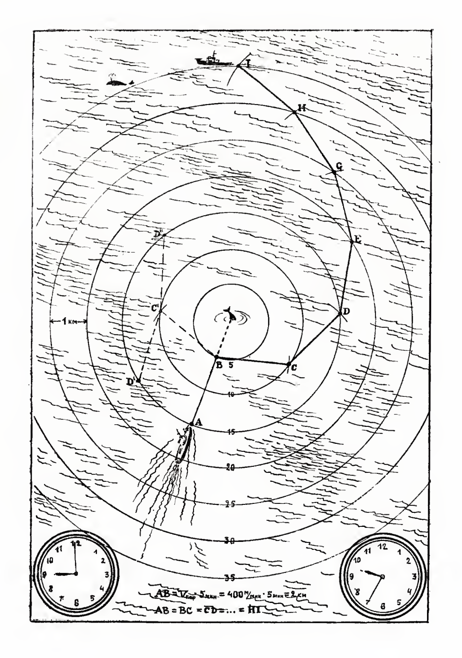
А как быть, если то, что мы ищем, не стоит на месте, да и мы сами можем пойти на поиски?

Мы в штурманской рубке быстроходного китобойного судна. Вдали, на расстоянии около трех километров, показался кит. Он выпустил в воздух фонтан и быстро скрылся под водой. Начался поиск.

Штурман судна быстро отметил на карте место, где только что был кит. Корабль направился полным ходом к этому месту.

Штурман склонился над картой.

— Хитрый кит, — рассуждает он вслух, — сейчас мчит что есть духу в неизвестном направлении. Скорость движения кита мы примерно знаем. Нарисуем на карте окружности, на которые кит успеет приплыть, не меняя направления, за равные промежутки времени, например, через каждые 5 минут. Радиус первой такой окружности будет равен скорости кита, умноженной на пять минут, радиус второй — скорости кита, умноженной на десять минут, и так далее. Например, если кит плывет со скоростью всего двести метров в минуту, то уже через пять минут он может оказаться на окружности радиуса один километр (200 м $\times$


I
H
G
E
D
C
B
A
C'
D'
D''
1 км
5
10
15
20
25
30
35
AB = $V_{кор}$ · 5 мин = 400 м/мин · 5 мин = 2 км
AB = BC = CD = ... = HI

$\times 5 = 1000$ м), через десять минут — на окружности радиуса два километра и так далее.

Представим себе вначале, что наш кит поплыл в направлении корабля. Где в этом случае может произойти встреча с китом?

Скорость корабля 13 узлов. Это примерно 400 метров в минуту. Значит, мы идем вдвое быстрее, чем кит. Время до встречи с китом можно рассчитать так:

$$\text{начальное расстояние до кита} = \text{время встречи с китом} \times \text{скорость корабля} + \text{время встречи с китом} \times \text{скорость кита}$$

Поэтому:

$$\text{время встречи с китом} = \frac{\text{начальное расстояние до кита}}{\text{скорость корабля} + \text{скорость кита}}$$

Подставим цифры:

$$\text{время встречи с китом} = \frac{3000 \text{ м}}{400 \text{ м/мин} + 200 \text{ м/мин}} = \frac{3000 \text{ м}}{600 \text{ м/мин}} = 5 \text{ минут.}$$

Штурман подождал, пока с момента исчезновения кита прошло пять минут.

— Товарищ капитан, — закричал он в переговорную трубу, — кит уже может быть где-то рядом, надо усилить наблюдение.

Но, увы, кита обнаружить в районе места первой встречи не удалось. Значит, по всей вероятности, он ушел по другому направлению. Где же теперь его искать?

Рассуждаем так. На пятой минуте встреча не состоялась, давайте организуем ее еще через пять минут, на десятой минуте. Кит к этому времени будет находиться где-то на соответствующей окружности. Наше судно к десятой минуте поиска тоже должно прийти на эту окружность. А идти ему осталось пять минут. Рассчитаем, какое расстояние мы пройдем за пять минут:

$$5 \text{ минут} \times \text{скорость корабля} = 5 \text{ мин} \times 400 \text{ м/мин} = 2 \text{ километра.}$$

Это расстояние мы и отложим от места первой встречи так, чтобы оно закончилось на той окружности, где окажется кит на десятой минуте. Это будет место второй встречи.

Если кита и там не окажется, найдем таким же обра-

зом место третьей встречи — на пятнадцатой минуте, и так далее.

Заметим, что путь китобойца пошел по ломаной линии, которая все время загибается против часовой стрелки. Так она может обежать весь горизонт, и в какую бы сторону ни плыл кит, в какой-то очередной точке он рано или поздно будет обнаружен. Ведь на каждой новой окружности китобоец оказывается одновременно с китом.

* * *

Теория поиска порой помогает принимать решения в обстановке, от поиска довольно далекой. Вот, например...

ЗАДАЧА ВРАТАРЯ

Футбольный матч приближался к концу. Болельщики, разочарованные тем, что счет так и не был открыт, стали продвигаться к выходу.

Все произошло довольно неожиданно: ошибка одного из защитников, и вот уже центральный нападающий с мячом в штрафной площадке. От одного удара зависит исход ответственного матча. Это хорошо понимает и вратарь. Он весь подобрался, готовясь к решительному броску.

Короткий резкий удар. Бросок вратаря. Мяч в сетке. Гол.

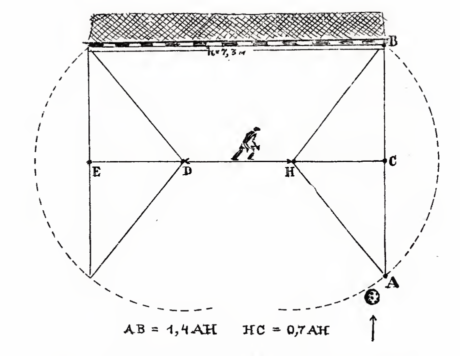
Приговор болельщиков был единодушен: во всем виноват вратарь. Вместо того чтобы спокойно стоять в ожидании мяча, он нервничал, суетился, и вот результат.

Действительно, суетиться нехорошо. Поэтому давайте без суеты, по-деловому разберемся в обстановке. Решить задачу вратаря мы попытаемся с помощью теории поиска.

Начнем с простой схемы. Прежде всего покажем на ней ворота, причем будем смотреть на них сверху.

Вратарь во время игры перемещается вдоль ворот, ширина которых h. Мяч летит в ворота со стороны поля, и, конечно, заранее неизвестно, в каком месте ворот он появится.

Задача вратаря — не пропустить мяч. Она очень напоминает задачу лесников, обязанных вовремя заметить возникновение пожара в лесу. Недаром в песенке поется: «Эй, вратарь, готовься к бою! Часовым ты поставлен у ворот».



Путь вратаря вдоль ворот в один конец обозначим S. Вратарю, сразу видно, совсем не обязательно доходить до границы ворот. Ведь он может взять мяч в броске, пока тот пролетает мимо него. Длина броска вратаря AH включает длину прыжка вратаря к мячу плюс длину его тела с вытянутыми руками.

Теперь будем рассуждать так. Возьмем наиболее трудный случай, когда мяч летит по самой границе ворот AB. Пока мяч пролетает путь AB, вратарь перемещается от точки H к точке D и обратно и успевает взять мяч. Если же мяч пойдет не по границе, а направится внутрь ворот, то он тем более будет взят.

Путь и длина броска вратаря должны быть такими, чтобы он успевал брать мяч либо в точке A, находясь в начале своего пути, либо в точке B, после того как он пройдет из H в D и вернется обратно в H. В этом вся суть расчета.

На языке математики это означает, что должна быть соблюдена такая пропорция:

$$\frac{AB}{V_м}=\frac{2S}{V_в}$$

Буквами $V_м$ и $V_в$ обозначены скорости движения мяча и вратаря.

Путь мяча по границе ворот $AB = 1{,}4\ AH$. Ведь это сторона квадрата, вписанного в окружность радиуса AH. Помните рассказ лесничего?

Получается, что

$$\frac{1{,}4AH}{V_м}=\frac{2S}{V_в}.$$

Взглянув на рисунок, замечаем, что

$$S = h-(HC+DE).$$

Но HC и DE — это половинки сторон вписанных квадратов, поэтому

$$HC=DE=\frac{1}{2}\,1{,}4AH=0{,}7AH.$$

Следовательно, длина пути вратаря в ожидании мяча

$$S = h-(0{,}7\ AH+0{,}7\ AH) = h-1{,}4\ AH.$$

Подставив значение S в нашу пропорцию, получим:

$$\frac{1{,}4AH}{V_м}=\frac{2(h-1{,}4AH)}{V_в}.$$

Решим пропорцию и найдем, чему должна быть равна длина броска вратаря AH.

$$1{,}4AH\times V_в = 2(h-1{,}4AH)V_м,$$

$$1{,}4AH\times V_в = 2hV_м-2\times1{,}4AH\times V_м,$$

$$1{,}4AH\times V_в+2\times1{,}4AH\times V_м = 2hV_м,$$

$$AH=\frac{2hV_м}{1{,}4V_в+2{,}8V_м}$$

Последняя формула и показывает, какой должна быть эта длина, чтобы мяч не прошел в ворота.

У нас теперь есть необходимое для того, чтобы рассчитать наилучший способ действий вратаря и оценить, правильно ли он решал свою задачу в злополучном матче.

Приступим к расчетам.

Футбольные ворота имеют ширину 7,3 метра. Примем скорость мяча равной 20 метрам в секунду (72 километра в час). Что касается скорости вратаря, то сначала предположим, что он передвигался в воротах шагом, затем — перебежками и наконец — быстрыми перебежками.

Расчет первый. Вратарь ходит шагом. $V_в = 1$ метр в секунду (около 4 километров в час).

Определяем необходимую длину броска вратаря.

$$AH = \frac{2hV_м}{1,4V_в + 2,8V_м} = \frac{2 \times 7,3 \times 20}{1,4 \times 1 + 2,8 \times 20} = \frac{292}{1,4 + 56} = \frac{292}{57,4} = 5,1 \text{ метра.}$$

Определяем необходимую длину пути вратаря в ожидании мяча.

$$S = h - 1,4AH = 7,3 - 1,4 \times 5,1 = 7,3 - 7,1 = 0,2 \text{ метра.}$$

Всего-навсего.

Расчет второй. Вратарь делает перебежки. $V_в = 5$ метров в секунду (18 километров в час).

Длина броска вратаря:

$$AH = \frac{2 \times 7,3 \times 20}{1,4 \times 5 + 2,8 \times 20} = \frac{292}{7 + 56} = \frac{292}{63} = 4,6 \text{ метра.}$$

Путь вратаря:

$$S = 7,3 - 1,4 \times 4,6 = 7,3 - 6,5 = 0,8 \text{ метра.}$$

Это чуть больше одного шага.

Расчет третий. Вратарь делает быстрые перебежки. $V_в = 10$ метров в секунду (36 километров в час).

Длина броска вратаря:

$$AH = \frac{2 \times 7,3 \times 20}{1,4 \times 10 + 2,8 \times 20} = \frac{292}{14 + 56} = \frac{292}{70} = 4,2 \text{ метра.}$$

Путь вратаря:

$$S = 7,3 - 1,4 \times 4,2 = 7,3 - 5,8 = 1,5 \text{ метра.}$$

Примерно два шага.

Пора сделать некоторые выводы.

Главное в работе вратаря — бросок. Как бы ни перемещался он в воротах, бросок должен быть как можно больше.

Длина пути вратаря в ожидании мяча зависит от скорости его перемещения. Наш расчет показал: если это скорость пешехода — вратарю лучше стоять на месте; если вратарь может развивать скорость бегуна, ему стоит передвигаться по шагу в ту и другую сторону; наконец, если он может перемещаться очень быстро, то полезно делать по два шага вправо и влево.

Поскольку, однако, мы не учли инерции вратаря, а также того, что он не может менять направление движения мгновенно, правильно будет сказать так: «в момент удара вратарю следует стоять на месте». Это, кстати, опытные вратари и делают.

Самый важный вывод заключается в том, что в футболе, как и в любом другом деле, необходим строгий расчет. Трудно без детального разбора назвать точную причину неудач нашего вратаря. На результат игры, конечно, очень влияет искусство спортсмена, его натренированность, боевой опыт. Но можно с полной уверенностью сказать: действуй вратарь так, как требует правильный расчет, — путь к победе станет много короче.

Теория поиска показывает, что тем, кто ищет, нужно иметь не только хорошие зрение и слух, но и развивать в себе способности к логическому мышлению, владеть математикой, уметь быстро ориентироваться в сложной обстановке. О тех, кто сумеет овладеть этими качествами, можно будет с полной уверенностью сказать: «Кто ищет, тот всегда найдет».

* * *

Несмотря на то, что мы освоили довольно сложные задачи, научились принимать решения в совсем не простой обстановке, до сих пор остается без ответа вопрос, который, как мы помним, столь важен для «автолюбителя на распутье». Как быть, если решать надо, а обстановка не ясна?

Эта задача не похожа ни на одну из тех, с которыми мы встречались. Видимо, она потребует и необычного решения.

Глава 9
НАУКА ОСТОРОЖНОГО РИСКА,



с которой описывается необычная игра, одинаково полезная людям любого возраста; выясняется, что делать, если начинаешь в чем-то сомневаться; дается ряд полезных советов и, наконец, раскрывается один из секретов великих полководцев



ЗАЯЦ ИГРАЕТ С ВОЛКОМ

— Ну, Заяц, погоди! — завопил Волк и бросился вдогонку за косым. Кинозрители затаили дыхание.

Вот Заяц подбегает к огромному пляжу. Волк поотстал, и Зайцу нужно быстро решить, как быть дальше: бежать через пляж или же притаиться где-нибудь на песочке. Заяц на секунду задумался.

Все зависит от того, что станет делать Волк: во-первых, он может начать рыскать по пляжу, во-вторых, ему ничего не стоит забраться на вышку и высматривать Зайца оттуда.

Если бы Заяц знал, что Волк станет рыскать по пляжу, то, конечно, самое правильное — бежать: пока Волк осмотрит весь пляж, Зайца и след простынет. Но ведь Волк может решить и по-другому — забраться на вышку. Тут уж он сразу заметит бегущего, и Зайцу несдобровать.

Как быть?

Давайте придем Зайцу на помощь. Очень уж хочется, чтобы Волк и на этот раз остался в дураках.

Главная трудность здесь в том, что мы, как и Заяц, не знаем, что станет делать Волк. И поэтому должны принимать решение в условиях неопределенности.

С задачами подобного рода приходится встречаться, конечно, не только Зайцу, но и людям самых различных профессий.

С неопределенностью обстановки мы встречаемся и в большинстве наших игр: шахматах, шашках, домино. Каж-

дый из играющих делает ход, не зная, что на уме у его партнера.

Наука, с помощью которой решаются подобные задачи, так и называется — теория игр. Теория игр — наука осторожного риска. Она учит, как в сложной, неопределенной обстановке без лишнего риска прийти к наилучшему результату.

Вернемся, однако, к нашему другу Зайцу, которого мы покинули как раз в такой сложной неопределенной обстановке.

Конфликт между Зайцем и Волком на игру похож, конечно, мало. Заяц играет, может быть, в последний раз в жизни. Тем не менее теория игр рассматривает происходящую драму как самую обычную игру, вроде шашек. И так же, как и в шашках, у игры «Заяц — Волк» есть свои правила. Эти правила удобно представить в виде небольшой таблицы.

ИГРА «ЗАЯЦ—ВОЛК»

		ВОЛК		
		Рыщет по пляжу	Наблюдает с вышки	Худший результат Зайца
ЗАЯЦ	прячется	не уйдет 0	возможно, уйдет 5	0
	бежит	уйдет 10	возможно, уйдет 5	5*
	Худший результат Волка	10	5*	

Таблица показывает, что могут сделать Заяц и Волк. Каждый из них в этой игре, как мы видим, может выбрать какой-нибудь из двух возможных ходов. Заяц либо бежит, либо прячется; Волк либо рыщет по пляжу, либо наблюдает с вышки.

И как во всякой игре, здесь тоже важно знать заранее, каков будет результат, если Волк сделает какой-нибудь из своих ходов, а Заяц — какой-нибудь из своих. Этот резуль-

тат в нашей игре удобно выразить с помощью цифр-очков от 0 до 10. Цифры эти показывают возможность спасения Зайца, его шансы улизнуть от Волка.

Если Заяц благополучно уходит от Волка, считаем результат игры 10, если же Зайцу улизнуть от Волка не удается — результат 0. Цифра же 5 означает, что надежды Зайца на спасение и наоборот примерно одинаковы.

Посмотрим на нашу табличку.

Если Заяц притаился, а Волк рыщет по пляжу, то у Зайца очень мало шансов улизнуть, рано или поздно Волк его найдет, поэтому оценим возможность Зайца, увы, в 0 очков. Если же Заяц, в то время как Волк рыщет по пляжу, бежит, то возможность спастись у него наибольшая — 10. Ведь пока Волк шаг за шагом осматривает пляж, Заяц наверняка уйдет.

Две оставшиеся клетки таблицы показывают, какой результат будет, если Заяц притаился либо бежит, а Волк наблюдает с вышки. В обоих случаях Заяц имеет возможность уйти, но также не исключен и противоположный исход — результат средний между 0 и 10, поэтому оценим его в 5 очков.

Какое же решение необходимо принять Зайцу? Другими словами, какой из двух возможных ходов он должен сделать, не зная заранее, что предпринял Волк?

Будем рассуждать за Зайца так.

Если он выберет свой ход «притаиться», то самый худший результат, который ему грозит, это 0.

Если же он решит делать другой ход — «бежать», то худшее, что его ожидает, это 5.

Выпишем эти худшие результаты справа от таблички. Конечно, Зайцу нужно выбрать тот свой ход, при котором будет лучший из этих двух худших результатов — 5. Отметим его звездочкой.

Можно сказать, что выбрав ход, при котором получается цифра со звездочкой, Заяц как бы застраховал себя на самый плохой случай. Действительно, если он побежит, то, что бы ни делал Волк, шансы на спасение у Зайца будут не меньше, чем 5. Это самый надежный для Зайца ход.

Теперь посмотрим на таблицу глазами Волка.

Если он будет рыскать по пляжу, то самый худший его результат — 10 (чем цифра больше, тем для Волка хуже).

Если же он надумал наблюдать с вышки, то худшее, что его ожидает, — 5 очков.

Выпишем худшие для Волка результаты внизу под таблицей. Волку нужно выбрать тот из двух своих возможных ходов, при котором его результат будет лучше — 5. Отметим его также звездочкой. И здесь можно сказать, что, выбрав ход, которому соответствует цифра со звездочкой, Волк страхует себя на самый плохой случай. Это для него наиболее надежный ход.

Заметим, что в клетке таблицы на пересечении надежных ходов Зайца и Волка оказалась обведенная для наглядности кружком цифра 5, равная обеим полученным раньше цифрам со звездочкой. В таких случаях говорят, что игра имеет седловую точку.

Вспомним, что называют в географии седловиной или перевалом в горах: понижение в горном хребте между двумя вершинами. Так и в нашей таблице седловая точка 5 служит как бы перевалом от худшего результата к лучшему. И если удается найти седловую точку, решение игры уже не составляет большого труда: пересекающиеся в ней ходы всегда наилучшие.

Так и в игре «Заяц — Волк» наилучшими решениями будут именно те ходы Зайца и Волка, которые пересекаются в седловой точке:

для Зайца — бежать;

для Волка — наблюдать с вышки.

Мы уже видели, что если Заяц бежит, то как бы ни вел себя Волк, возможность улизнуть, равная 5 очкам, Зайцу гарантирована.

С другой стороны, и Волк, если он будет придерживаться своего надежного хода — наблюдать с вышки, — тоже может с гарантией считать, что шансы Зайца спастись не выше 5, что бы тот ни делал.

И, наконец, самое важное. Если Волк из-за своего вечного упрямства или просто по малограмотности не сделает правильного надежного хода, то возможность Зайца спастись станет значительно больше, чем гарантированная.

Например, стоит Волку начать рыскать по пляжу, как Заяц, держась своего надежного хода — убегая, сможет улизнуть с результатом 10 очков — наверняка.

Рассмотрим несколько любопытных задач, которые помогут нам поближе познакомиться с теорией игр.

ЧТО ДЕЛАТЬ, ЕСЛИ КАЖЕТСЯ, ЧТО ЗАБЫЛ ВЫКЛЮЧИТЬ ТЕЛЕВИЗОР?

Рассеянный человек уезжал в отпуск. За несколько минут до отхода поезда ему показалось, что он забыл дома выключить телевизор.

А может быть, нет?

Поезд вот-вот тронется. Как быть?

Можно, конечно, прогнать сомнения прочь и забраться на полку. Но вряд ли удастся спокойно уснуть. Ведь телевизор, если он включен, наверняка сгорит. Придется платить рублей пятьдесят за ремонт.

Да, пожалуй, нужно скорей хватать чемодан и вместо Кавказа ехать домой выключать телевизор.

А если тревога окажется напрасной? Вот будет обидно! Ведь зря пропадет билет на поезд, а стоит он тридцать рублей.

Оставив рассеянного владельца телевизора с его сомнениями и чемоданом на подножке вагона, попробуем решить задачу, которую он сам себе (а заодно и нам) задал.

Все уже, видимо, догадались, что помочь тут может только теория игр. Составим таблицу игры «Рассеянный — телевизор».

ИГРА «РАССЕЯННЫЙ — ТЕЛЕВИЗОР»

РАССЕЯННЫЙ \ ТЕЛЕВИЗОР	Выключен	включен	Худший результат рассеянного
домой	0 руб.	50 руб.	50
в отпуск	30 руб.	(30) руб.	30*
Худший результат телевизора	0	30*	

В качестве партнера по игре с рассеянным здесь выступает телевизор. Телевизору, конечно, безразлично, кто выиграет. Поэтому его участие в игре сводится к тому, что он может оказаться либо включенным, либо выключенным.

Подобные игры, в которых нет активного противника, называют «играми с природой». Не считая природу злонамеренной, мы все-таки для страховки будем принимать, что она действует всегда наихудшим для человека образом, «по закону бутерброда».

Рассеянного ожидают следующие результаты игры:

если он поедет в отпуск, а телевизор, на его счастье, окажется выключенным — 0 руб.;

поездка в отпуск при включенном телевизоре обойдется в 50 рублей (стоимость ремонта);

если рассеянный вернется домой только затем, чтобы удостовериться, что телевизор выключен, — это будет стоить ему 30 рублей (стоимость билета);

тот же убыток сохранится и в том случае, если окажется, что телевизор был включен.

Для того чтобы подсказать рассеянному правильный план действий, нужно найти решение игры.

К счастью, игра имеет седловую точку. Отметим ее (30 рублей), как мы это уже делали, кружком. Седловая точка показывает правильный ход рассеянного — возвратиться домой. Только в этом случае он может быть уверен, что его убыток ни при каких обстоятельствах не будет больше 30 рублей. Стоит, однако, рассеянному рискнуть и поехать в отпуск, как никто уже не сможет поручиться, что ему не придется потратить 50 рублей на ремонт телевизора. И хорошо еще, если обойдется без пожара.

ГРИППОФАГ ИЛИ АНТИГРИППИН?

В Научно-исследовательском институте кашля и чиха (возможно, где-нибудь и есть такое учреждение) шло оживленное обсуждение новых лекарств против гриппа.

Уважаемый доктор Бармалеев настойчиво предлагал изобретенный им гриппофаг, который прямо-таки пожирал гриппозные вирусы.

Не менее уважаемый врач Айболитов робко заметил, что при некоторых формах болезни гриппофаг вместе с вирусами немножко ест и больного. И это несколько осложняет лечение и затягивает болезнь. Взамен гриппофага он предложил свое лекарство — антигриппин, обладающий кроме лечебного действия еще и очень приятным вкусом.

К сожалению, признался Айболитов со свойственной ему прямотой, антигриппин тоже не безупречен. Хоть он и не ест больных и приятен на вкус, но в некоторых случаях гриппозный вирус сам с удовольствием уплетает это лекарство. И тут уж больному приходится выпутываться самому, что, конечно, удлиняет срок лечения.

Страсти разгорались. Одни были категорически за прожорливый гриппофаг Бармалеева, другие — за вкусный антигриппин Айболитова. Раздавались и мирные предложения: лечить больных гриппофагом и антигриппином одновременно. Оказалось, однако, что это невозможно. Смесь обоих лекарств взрывалась от малейшего прикосновения.

Трудно сказать, чем бы закончился этот спор, если бы не выступление врача Статистика, который по поручению института аккуратно занимался бухгалтерией гриппа.

Статистик вывесил таблицу.

ИГРА «ЛЕКАРСТВА — ВИРУСЫ ГРИППА»

ЛЕКАРСТВА	ВИРУСЫ ГРИППА: Гонолулу	ВИРУСЫ ГРИППА: Сингапур	Худший результат лекарств
гриппофаг Бармалеева	3 дня	6 дней	6
антигриппин Айболитова	4 дня	(5) дней	5*
Худший результат вирусов	3	5*	

— Действие гриппофага и антигриппина проверялось на многих больных, — уверенно докладывал Статистик. — Как было установлено, часть заболевших подвергалась атаке гриппозного вируса «Гонолулу», а часть — вируса «Сингапур». Причем оказалось, что эти возбудители гриппа поразному действуют на больного и не одинаково реагируют на оба лекарства. Поэтому продолжительность болезни может быть при лечении самой разной. Гриппофаг вылечивал от вируса «Гонолулу» за три дня, а от вируса «Сингапур»—

за шесть. Антигриппин же затягивал борьбу с вирусом «Гонолулу» до четырех дней, но зато управлялся с вирусом «Сингапур» за пять. К сожалению, до окончания болезни заранее, сказать, какой вирус напал на человека, невозможно. Перед нами типичная игра «лекарства — вирусы гриппа».

Далее Статистик объяснил, как должна решаться эта игра — конфликт между лекарствами и вирусами. Сначала он выписал худшие результаты лекарств и вирусов и выбрал из них лучшие, которые отметил звездочкой. На пересечении ходов, соответствующих цифрам со звездочкой, здесь также оказалась седловая точка — срок болезни пять дней. Цифру 5 статистик обвел кружком.

— Итак, — заключил Статистик, — план борьбы с гриппом ясен. Необходимо применять второй ход — лекарство антигриппин Айболитова. В этом случае, какой бы вирус ни был причиной болезни, будет надежная гарантия, что за пять дней больной выздоровеет. Применение гриппофага такой гарантии не дает: стоит напасть на больного вирусу «Сингапур» — и срок болезни сразу же возрастает до шести дней — на целый день больше. А ведь гриппом болеют миллионы людей. И каждый выигранный у болезни день вырастает в миллионы дней здоровья и труда.

* * *

До сих пор нам везло — все игры, с которыми мы встречались, имели седловые точки. Правильный план игры находился легко и просто. Увы, так бывает далеко не всегда.

ЛОВИСЬ, РЫБКА, БОЛЬШАЯ И МАЛЕНЬКАЯ

В одинаковых надувных резиновых лодках мы с приятелем отправляемся на рыбную ловлю. На якорь мы становимся почти рядом. И удочки у нас одинаковые, и поплавки, и крючки. Разница только в одном — в улове.

Вот и на этот раз. Когда дома мы взвесили свою добычу, оказалось, что приятель выловил четыре килограмма рыбы, а у меня едва набралось три. Ну не обидно ли?

Правда, во время последней рыбалки кое-что стало проясняться. Я заметил, что приятель доставал наживку не так, как я — из банки, где она лежала навалом,

а вынимал ее каждый раз из отдельного бумажного пакетика.

Для чего все это нужно, я, признаться, не понимал.

— Как это тебе удалось наловить рыбы почти в полтора раза больше, чем мне? Неужели потому, что ты завернул наживку, как в гастрономе, в бумагу?

Настроение у моего приятеля после успешного лова было превосходное.

— Представь себе, дело действительно в бумажках. И еще кое в чем...

Вскоре на листке, вырванном из тетрадки, появилась табличка с записью игры «Рыбак — рыбка».

ИГРА «РЫБАК — РЫБКА»

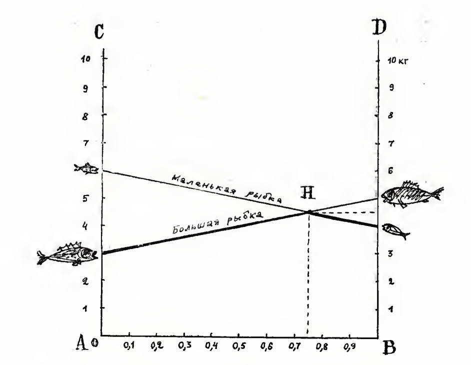
		РЫБКА: большая	РЫБКА: маленькая	Худший результат рыбака
РЫБАК	червяки	3 кг	6 кг	3
РЫБАК	тесто	5 кг	4 кг	4*
	Худший результат рыбки	5*	6	

Секрет удачи моего приятеля оказался вот в чем.

Мы обычно брали наживку двух разных видов: шарики из теста и червяки. На тесто лучше шла маленькая рыбка, ее, как говорили бывалые рыбаки, можно было наловить до шести килограммов, а на червяков — большая — улов достигал пяти килограммов.

Так как маленькая рыбка давала больший улов, я предпочитал насаживать на крючок тесто. Но, видимо, тесто нравилось и большим рыбкам тоже. Они выхватывали наживку из-под носа у маленьких рыбок, а сами при этом на крючок попадались редко. Отсюда и мой результат — всего три килограмма.

Мой приятель пошел иным путем. Вначале он, как и я, пытался найти лучший ход. Мы знаем, что для этого надо попробовать отыскать седловую точку игры. Но отмеченный



звездочкой лучший из худших результатов рыбака — четыре килограмма, а рыбки — пять килограммов. Цифры разные — значит, седловой точки нет.

Давайте вдумаемся в эти цифры.

Лучший из худших, то есть надежный результат рыбака — четыре килограмма — означает, что я в любом случае могу рассчитывать на такой улов. Но для рыбки самый малый надежный результат — пять килограммов. Иными словами, на крючок готово попасть пять килограммов рыбы, а я могу взять всего четыре килограмма.

Здесь что-то не так. Ведь ни один из ходов рыбака не гарантирует улов более четырех килограммов. Где выход из положения?

Выход заключается в том, что рыбак должен здесь применять не один-единственный ход, подобно тому, как это делалось во всех предшествующих играх, а оба, чередуя их

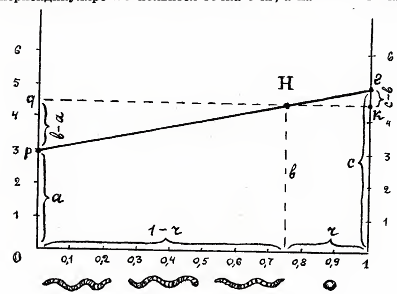
умным образом. Такой план действий называется смешанным.

Для того чтобы найти смешанный план игры, удобно воспользоваться, как мы это уже не раз делали, графическим приемом. Он показан в верхней части рисунка.

По горизонтальной оси в любом масштабе отложим отрезок, длина которого равна единице. Из начала и из конца этого отрезка восстановим перпендикуляры *AC* и *BD* и на них построим шкалы, на которых можно отсчитывать вес рыбы до десяти килограммов. Причем, на *AC* будем откладывать результаты того хода рыбака, при котором он насаживает тесто, а на *BD* — результаты другого хода, при котором на крючке червяк.

Вначале рассмотрим результаты игры для больших рыбок. Как видно из таблицы, это 3 килограмма для теста и 5 килограммов для червяка. На перпендикуляре *AC* появится соответствующая точка 3 кг, а на перпендикуляре *BD* — точка 5 кг. Соединим эти точки прямой линией и напишем на ней для памяти «Большая рыбка».

Затем проделаем то же самое для маленьких рыбок. На перпендикуляре *AC* появится точка 6 кг, а на *BD* — точка



4 кг. Соединим эти точки прямой с надписью «Маленькая рыбка».

Далее поступим так же, как и во всех предыдущих играх: вначале найдем худшие возможные результаты рыбака, а затем из них выберем наилучший.

Худшие результаты рыбака, как видно из нашего рисунка, обозначены жирной ломаной линией, соединяющей наименьшие уловы на тесто и на червяка — точки 3 кг и 4 кг. Лучший из этих худших результатов получается в точке H — месте излома линии. Это наиболее надежный гарантированный результат. Он равен, если посмотреть на правую шкалу, $4^1/_2$ килограмма. Как мы и предвидели, этот результат находится между отмеченными звездочками в таблице худшим результатом рыбака — 4 кг и рыбки — 5 кг.

Теперь остается только сообразить, какой нужно принять смешанный план, чтобы этого результата добиться: требуется узнать, в каком соотношении, как часто рыбак должен применять тесто и червяка.

Ответ на этот вопрос также дает график на рисунке.

Сначала рассмотрим, как подбираются частоты применения теста и червяка при игре с большой рыбкой. Для этого увеличим интересующую нас часть графика и рассмотрим ее отдельно, в нижней части рисунка.

Обозначим результат первого хода рыбака — «тесто» — буквой a, второго хода — «червяк» — буквой c, а полученный надежный результат — буквой b. Обозначим также частоту применения первого хода буквой $ч$, тогда очевидно, что второй ход должен применяться с частотой $1 - ч$.

Ясно, что при смешанном плане игры надежный результат должен быть равен сумме произведений результатов обоих ходов на соответствующие частоты их применения:

$$b = a \times ч + c(1 - ч)$$

Пользуясь схемой, помещенной в нижней части рисунка, легко доказать, что нужная нам частота $ч$ есть не что иное, как участок горизонтальной оси между b и c. Действительно, если мы проведем через точку H пунктирную горизонтальную линию gk, то получим два подобных треугольника qpH и keH, для которых можно написать:

$$\frac{pg}{ke} = \frac{gH}{kH}$$

Подставим в эту формулу величины соответствующих сторон треугольников, которые можно снять прямо с рисунка:

$$pg=b-a;\quad ke=c-b;\quad gH=1-ч;\quad kH=ч.$$

Получим:

$$\frac{b-a}{1-ч}=\frac{c-b}{ч}$$

Или, после несложных преобразований:

$$(b-a)\times ч=(c-b)\times(1-ч);\ bч-aч=c(1-ч)-b(1-ч);$$
$$b\times ч-a\times ч=c\times(1-ч)-b+b\times ч;$$
$$b=a\times ч+c\times(1-ч).$$

Это и есть формула надежного результата, подтверждающая, что для его получения необходимо чередовать первый ход (тесто) с частотой ч и второй ход (червяк) с частотой 1—ч.

Из рисунка видно, что

$$ч=0{,}25,\ \text{а}\ 1-ч=0{,}75.$$

Следовательно, рыбак должен применять свой первый ход в три раза реже, чем второй:

$$\frac{0{,}25}{0{,}75}=\frac{1}{3}.$$

В среднем на каждые три червяка должно приходиться одно тесто. Только в этих условиях и можно надеяться получить лучший надежный результат $4^1/_2$ килограмма. Вот он:

$$b=a\times ч+c\times(1-ч)=3\times0{,}25+5\times0{,}75=0{,}75+3{,}75=4{,}5\ \text{кг}.$$

К подобным же выводам можно прийти, изучая нужное чередование наживки и для малой рыбки. И здесь, чтобы получить средний результат $4^1/_2$ килограмма, тесто и червяк должны чередоваться в соотношении 1:3.

Ну, а причем же тут загадочные бумажные пакетики, из которых извлекалось то тесто, то червяки?

Оказывается, в этом «священнодействии» есть определенный смысл. Как мы знаем, рыбаку нужно чередовать наживку в соотношении 1:3. Такие частоты должны получаться в среднем, после многих забрасываний удочки —

ходов рыбака. Каждый же отдельный ход должен быть случайным, неожиданным для рыбки. Иначе она приноровится к определенной наживке, будет ее ждать и не даст себя обыграть.

Вот мой приятель и разложил кусочки теста и червяков в пакетики. Пакетиков с червяками было заготовлено ровно в 3 раза больше, чем с тестом. Причем, даже сам рыбак не знал, какая наживка в какой пакетик попала. Так и получалось, что каждый ход был для рыбок сюрпризом, а в среднем выполнялся наилучший смешанный план ловли.

В этом-то и заключался секрет успеха премудрого рыболова.

* * *

Навыки, полученные в предыдущих рассказах, помогут нам «выловить» и счастливый конец старой сказки о витязе на распутье.

КОНЕЦ СТАРОЙ СКАЗКИ

Мы расстались с моим другом, автолюбителем, в тот драматический момент, когда он решил направить свой «запорожец» в объезд по более длинной дороге. Такое решение было принято после оживленной консультации с группой специалистов, мнения которых разделились.

Большинство голосов (два из трех) было за то, что основная дорога размыта. Поэтому и решено было направиться в объезд. Вместе с тем, прямой путь, если бы дорога была исправна, сулил весьма значительный выигрыш времени. Все это показано на рисунке.

Правильным ли было решение автолюбителя, все ли оно учитывало? Попробуем сейчас в этом разобраться.

Сам того не подозревая, наш автолюбитель вступил в игру с природой, правила которой нам теперь уже известны.

У автолюбителя два возможных хода: первый — «путь прямо», второй — «путь в объезд».

Природа в этой игре выступает в образе дороги. У нее также два хода. Она может быть «размыта» и «как новенькая».



Результаты ходов наших игроков удобно выразить в часах пути (эти цифры никто из специалистов не оспаривал).

Если путь автолюбителя лежит прямо, а дорога оказалась размытой, то время в пути — пять часов. Если же в этом случае дорога «как новенькая» — время сократится до одного часа.

Если автолюбитель направился в объезд, то очевидно, что независимо от состояния основной дороги его путь займет четыре часа.

Чтобы найти верное решение игры, здесь нужно обязательно учесть и те советы, которыми пользовался автолюбитель.

Сделаем это так. Будем умножать каждый результат на степень достоверности (вероятность) полученных сведений об обстановке: время движения по размытой дороге умножим на $\frac{2}{3}$ (два советчика из трех), а время движения по

«новенькой» дороге — на $\frac{1}{3}$ (один из трех). Затем, чтобы получить общую картину, сложим результаты для каждого из ходов автолюбителя. Получим:

для пути автолюбителя «прямо»

$$5 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} \text{ часа;}$$

для пути автолюбителя «в объезд»

$$4 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4 \text{ часа.}$$

То, что сумма возможных значений времени в пути для первого хода автолюбителя на $\frac{1}{3}$ часа (20 минут) меньше, чем для второго хода, в соответствии с теорией игр говорит нам о том, что путь прямо быстрее, выгоднее, чем в объезд.

Теперь мы можем вполне определенно сказать нашему витязю: твое решение о пути в объезд было неверным.

Так мы еще раз убедились в том, что очевидное с первого взгляда решение далеко не всегда на поверку оказывается правильным. И чтобы найти верное решение, нужно обязательно подружиться с наукой.

Рассказы, которые познакомили нас с теорией игр, носят несколько несерьезный, шуточный характер. Пусть это, однако, не обманет моего читателя. Есть у теории игр и совсем не шуточное поле деятельности. Эта теория находит сегодня все большее применение в самых серьезных делах нашей страны.

ИГРА «АВТОЛЮБИТЕЛЬ — ДОРОГА»

		ДОРОГА	
		размыта ($\frac{2}{3}$ голосов)	как новенькая ($\frac{1}{3}$ голосов)
АВТОЛЮБИТЕЛЬ	путь прямо	5 часов	1 час
	путь в объезд	4 часа	4 часа

Экономика и правила движения транспорта, биология и управление производством, военное дело и социология — вот объекты деятельности теории игр.

Здесь мы не сможем показать эту деятельность во всей ее сложности. Но кое-что все же попробуем.

МАТЧ «ГЕОЛОГИ — НЕФТЬ»

Этот матч проходил не на стадионе. Полем для весьма серьезной игры служил один из районов нашей страны, богатый нефтью.

Геологи бурили нефтяные разведочные скважины двух видов: глубокие и неглубокие.

Бурение глубокой скважины — сложная инженерная задача, требующая большого времени, значительных сил и средств. Между тем, было известно, что в районе, где велась разведка, можно ожидать нефть не только на больших глубинах, но и на малых.

Разведка на малых глубинах требует меньших усилий, ведется быстрее.

Когда же бурить глубокую скважину, а когда — неглубокую? Ведь точно сказать, на какой глубине нефть, не всегда возможно.

И вот геологи решили «поиграть» с нефтью, вызвать ее на матч. Составили таблицу игры.

У геологов два возможных хода: бурить неглубоко и бурить глубоко. Нефть тоже имеет две возможности: залегать глубоко и неглубоко.

ИГРА «ГЕОЛОГИ — НЕФТЬ»

ГЕОЛОГИ \ НЕФТЬ	Глубоко	Неглубоко
Бурят неглубоко	0,3	0,6
Бурят глубоко	0,5	0,4

Это так называемая «игра с природой». Природа не будет чинить сознательных препятствий геологам. Но все же может невольно принести им массу неприятных сюрпризов: долгий и трудный поиск оказывается безрезультатным.

Поэтому, как и в случае с телевизором, будем для гарантии считать, что природа всегда ведет себя наихудшим образом.

Предполагаемые результаты игры геологи рассчитали заранее. Это вероятности обнаружения нефти для обоих видов бурения при глубоком и неглубоком ее залегании. Откуда берутся подобные вероятности, мы помним по рассказам об арифметике случайностей. Мы принимаем такие цифры:

бурят неглубоко, а нефть лежит глубоко — обнаружение маловероятно — 0,3;

бурят неглубоко и нефть неглубоко — обнаружение довольно вероятно — 0,6;

бурят глубоко и нефть глубоко — обнаружение вероятно, но несколько меньше, чем в предыдущем случае, ибо эта задача более сложная — 0,5;

бурят глубоко, а нефть неглубоко — вероятность еще меньше, — ибо ищут не там, где есть нефть, но все же выше, чем в первом маловероятном случае — 0,4.

Вся эта задача несколько напоминает известный шуточный вопрос: где лучше искать утерянный предмет — под фонарем, где светло, или в темноте, где его потеряли?

Принимаясь за решение задачи геологов, мы сразу же замечаем, что эта таблица очень напоминает таблицу игры «Рыбак — рыбка». Каждое число этой таблицы ровно в 10 раз меньше, чем такое же число таблицы «Рыбак — рыбка». Поэтому, даже не выбирая лучших из худших результатов, можно сказать, что геологам, как и рыбакам, не повезло. Игра не имеет седловой точки, и поэтому нужно искать смешанный план действий.

Для расчетов смешанного плана можно было бы построить график, подобный полученному для рыбаков и рыбок. Но этого можно и не делать. Нас вполне устраивает график на рисунке о рыбаке и рыбке. Только, пользуясь им, будем считать, что на перпендикулярах AC и BD откладываются отрезки длиной не до десяти килограммов, а до единицы. Это даст возможность сразу же снять с графика интересующее нас необходимое соотношение частот первого и

второго хода геологов. Оно, как и у рыбака, останется равным 0,25:0,75, или 1:3.

Произведя подобный расчет, геологи, видимо, должны будут распределить свои возможности (людей, машины, оборудование) таким образом, чтобы, в среднем, 0,25 всех усилий тратилось на неглубокое бурение и 0,75 — на глубокое.

А для того чтобы найти результат работы геологов по смешанному плану, воспользуемся известной нам формулой премудрого рыбака:

$$b = a \times ч + c \times (1 - ч) = 0{,}3 \times 0{,}25 + 0{,}5 \times 0{,}75 = 0{,}075 + 0{,}375 = 0{,}45.$$

Это означает, что геологам при смешанном плане гарантируется вероятность обнаружения нефти 0,45. К сожалению, не очень много, но наверняка больше, чем можно было бы получить, строя план по-иному.

Теория игр подготовила нас к ответу еще на один вопрос, который был поставлен в начале книги: как слабому победить сильного? Постараемся и на него ответить.

ВЕЛИКИЙ ПОЛКОВОДЕЦ БЕРЕТ ПЕРЕВАЛ

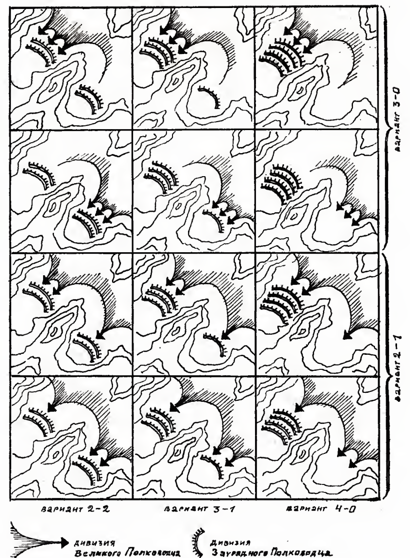
Почему великим полководцам удается с малыми силами разбить во много раз превосходящие силы врага?

История неопровержимо свидетельствует: великие полководцы отличались от своих заурядных коллег, в частности, тем, что умели своевременно и верно рисковать.

Рассмотрим механизм такого обдуманного риска. Лучше всего это сделать на примере.

Великий Полководец (будем для краткости называть его В. П.), силы которого составляют три дивизии, должен во что бы то ни стало прорваться через горный перевал. Задача эта не из легких, ибо перевал обороняют четыре дивизии врага. Правда, во главе их стоит Заурядный Полководец (З. П.). Качество дивизий противников принимается одинаковым.

Перевал имеет два прохода. Условия нашей баталии таковы, что при встрече противоборствующих сторон на проходах перевала побеждает та из них, у которой дивизий на данном проходе больше: она уничтожает противника и оставляет за собой перевал.


вариант 3-0
вариант 2-1
вариант 2-2
вариант 3-1
вариант 4-0
дивизия Великого Полководца
дивизия Заурядного Полководца

Казалось бы, шансы В. П. на победу равны нулю — ведь он в абсолютном меньшинстве. Но у него, оказывается, все же есть некоторый повод для размышлений. Ведь он может рискнуть прорваться через перевал, обеспечив себе перевес на одном из проходов.

Великий Полководец начинает с того, что анализирует сложившуюся ситуацию. Для этого он оценивает возможные результаты сражения при всех вариантах соотношения сил на перевале. Проследим ход рассуждений Великого Полководца. Он мыслил примерно так.

У З. П. есть всего три хода — варианта распределения своих четырех дивизий на защиту двух проходов: 4 и 0, 3 и 1, 2 и 2 дивизии соответственно на первый и второй проход.

В. П. имеет всего два варианта. Он может распределить свои три дивизии так: 3 и 0 или 2 и 1 дивизии. Причем, поскольку он может переставить дивизии по перевалам местами (0 и 3 или 1 и 2), то количество вариантов у В. П. удваивается.

Итак, всего можно ожидать 12 вариантов взаимного расположения сил В. П. и З. П. по проходам. Все они показаны на нашем рисунке, каждый в своей клетке.

Так как В. П. заранее не знает, какой вариант распределения сил избрал З. П., то он должен произвести расчеты ожидаемых результатов сражения для каждого из возможных вариантов.

Так, если при варианте З. П. 4 — 0 дивизий В. П. применит свой вариант 3 — 0, то в результате сражения на первом проходе 3 или 0 дивизий В. П. столкнутся с четырьмя дивизиями З. П. На втором проходе 0 либо 3 дивизии В. П. встретятся с 0 дивизий З. П.

В соответствующих проходах в кружках проставлены числа, характеризующие результат сражения: три дивизии В. П. против четырех дивизий З. П. несут поражение; это означает, что один проход остается за З. П. В кружке на проходе, где встречаются три дивизии В. П. и четыре дивизии З. П., ставится цифра 1. Если три дивизии В. П. встречаются на втором проходе с 0 дивизий З. П., то это значит, что З. П. теряет один проход, и в кружке ставится цифра — 1. Если 0 дивизий В. П. сходятся с 0 дивизий З. П., то результат сражения ничейный и в соответствующем кружке появляется цифра 0.

Найдем далее средний результат — среднее число сохраненных проходов по варианту распределения сил В. П. 3 — 0 и варианту З. П. 4 — 0. Оно равно отношению суммарного результата к числу проходов:

$$\frac{1+1-1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Этот результат показан в двойном кружке на пересечении соответствующих вариантов (ходов) В. П. и З. П. Он означает, что если В. П. рискнет распределить силы по проходам в соотношении 3 и 0, а З. П. будет распределять силы в соотношении 4 и 0, то Заурядному Полководцу в среднем удастся отстоять лишь $^1/_2$ прохода. Если бы З. П. поменял силы первого и второго проходов, то это на среднем результате не отразилось бы, так как В. П. эти варианты учитывает (поменялась бы лишь нумерация проходов).

Рассмотрим далее, как будет обстоять дело при других ходах — вариантах распределения сил В. П. и З. П. и внесем полученные результаты в соответствующие клетки.

Средние значения результатов сражений при всех вариантах соотношения сил на перевалах удобно для наглядности представить в виде отдельной таблицы.

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ СРАЖЕНИЙ ПРИ ВСЕХ ВАРИАНТАХ СООТНОШЕНИЯ СИЛ НА ПЕРЕВАЛЕ (СРЕДНЕЕ ЧИСЛО СОХРАНЕННЫХ ПРОХОДОВ).

ВАРИАНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛ ВЕЛИКОГО ПОЛКОВОДЦА

ВАРИАНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛ ЗАУРЯДНОГО ПОЛКОВОДЦА	Вариант 3—0	Вариант 2—1	Худший результат ВП
Вариант 4—0	$\frac{1}{2}$	0	0
Вариант 3—1	($\frac{1}{2}$)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Вариант 2—2	0	1	0
Худший результат З. П.	$\frac{1}{2}$*	1	

Оценивая полученные средние результаты по всем вариантам, можно заметить, что наилучший из них для Великого Полководца получается тогда, когда он распределяет силы в соотношении 2 и 1, а у Заурядного Полководца при этом соотношение 4 и 0. Либо у В. П. 3 и 0, а у З. П. 2 и 2. В этих случаях среднее число проходов, сохраненных З. П., равно 0, то есть Заурядный Полководец терпит полное поражение и теряет перевал.

Однако вариант В. П. 2 — 1 при ближайшем рассмотрении оказывается для него неприемлемым. Действительно, этот вариант хорош лишь при варианте З. П. 4 — 0. Но стоит Заурядному Полководцу случайно принять свой вариант 2—2, как сразу же оборона его становится наилучшей из всех возможных — среднее число сохраненных проходов равно единице, то есть максимуму.

Поэтому Великому Полководцу целесообразно остановиться на своем варианте 3 — 0. При этом ему в любом случае гарантируется средний результат не худший, чем $\frac{1}{2}$. Появилась наша старая знакомая — седловая точка. А поскольку противник у Великого Полководца заурядный и не владеет теорией игр, то не исключено, что он примет самое заурядное решение — без всякого риска разделит силы в соотношении 2 и 2 — и будет разбит наголову.

Так обдуманный риск слабого приносит ему победу над сильным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ,

в котором подводятся некоторые итоги

Дойдя до этого места и осознав, что до конца книги осталось явно меньше, чем прочитано, читатель вправе задать себе (и автору) вопрос:

— А в чем же все-таки главный секрет великих полководцев?

Я бы ответил на этот вопрос так.

Великими полководцами в этой книге мы называли тех, кто должен принимать важные решения в сложной обстановке. Это люди труда: рабочие и колхозники, инженеры и агрономы, военачальники и врачи.

Главный секрет искусства этих людей в том, что они умеют в самых сложных обстоятельствах находить наилучшее решение. То единственное, которое приносит победу.

В наш век научно-технической революции уже нельзя принимать серьезные решения по старинке, рассчитывая только на свой опыт и интуицию. Произошли огромные перемены во всех сферах человеческой деятельности. Люди глубже проникли в тайны природы. Неизмеримо более сложными и мощными стали машины. Вооруженный невиданной ранее техникой, человек стал во много раз сильнее, чем прежде. Он в тысячи раз лучше и дальше видит, быстрее передвигается, в его руках исполинские механизмы, способные менять лик планеты.

Вместе с тем, возросшее могущество человека, новые масштабы его деятельности ко многому обязывают. Хозяин Земли должен быть мудрым и осмотрительным в своих решениях. Ведь теперь от его действий зависит несравненно больше, чем раньше. Неверные и даже просто не очень хорошие решения оборачиваются непоправимыми бедами, ведут к напрасной трате огромных ресурсов, к ненужному расходу человеческих сил, миллионным убыткам.

Зато верное, обоснованное решение сулит плановому социалистическому хозяйству огромные преимущества. Вспомним рассчитанные нами наилучшие планы перевозки руды или раскроя металла и весомую экономию, которую они дают. Разумное решение способно творить чудеса.

Особую роль при разработке наилучших решений играет советская наука, которая теперь, в эпоху научно-технической революции, не только источник знаний, но и, как было сказано на XXIV съезде партии, «непосредственная производительная сила общества». Это означает, что успехи науки сегодня способны сразу же сделать человека сильнее. Отсюда следует: чтобы быть сильным, нужно в совершенстве владеть наукой о наилучших решениях — исследованием операций. Нужно понять и освоить весь арсенал ее методов.

Подобно тому, как современный врач не может нормально работать без необходимого технического оборудова-

ния — микроскопа, рентгеновского аппарата, электрокардиографа, — так и тот, кто принимает решение, не может обойтись сегодня без теории вероятностей, математического планирования, теории игр. Освоение этого «технического оборудования» под общим названием «исследование операций» и происходило на страницах нашей книги.

Дело это не легкое!

Как писал один из основоположников исследования операций, мы шли «прямой и узкой тропой между западнями Переупрощения и болотом Переусложнения».

Можно ли сказать, что мы уже проникли во все таинства выработки решений, освоили науку исследования операций? Нет, пока еще нельзя. Так же, как умение решать арифметическую задачу о бассейне с трубами еще не говорит о том, что вы можете спроектировать и построить плавательный бассейн.

Эта книга — лишь букварь по исследованию операций. И в этом нет ничего огорчительного: с букваря начинают все, в том числе и самые великие полководцы.

И еще. Исследование операций не заменяет знаний «своих» наук, которыми должны владеть люди самых различных специальностей. Чтобы принимать в жизни верные решения, нужны знания конкретного дела, практический опыт, долгий и настойчивый труд.

Справедливо будет сказать: «Сделан лишь первый шаг на трудном пути великих полководцев. Это и мало и много. Мало потому, что шаг пока один. Много, ибо первый шаг означает начало пути».

ВНИМАНИЕ!

Тем, кому удалось расшифровать надпись на титульном листе и кто согласен с ее содержанием, может понадобиться помощь.

Лучшие помощники — книги.

Вот некоторые из них, те самые, которыми с удовольствием пользовался и автор:

— по исследованию операций и теории решений (к главам 1 и 2)

Е. С. Вентцель
ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ.
М., «Советское радио», 1972.

А. Кофман, Р. Фор
ЗАЙМЕМСЯ ИССЛЕДОВАНИЕМ ОПЕРАЦИЙ.
М., «Мир», 1966.

В. А. Абчук, Л. А. Емельянов, Ф. А. Матвейчук, В. Г. Суздаль
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЫРАБОТКИ РЕШЕНИЙ.
М., Воениздат, 1972.

— по маневрированию (к главе 3)

М. И. Скворцов, И. В. Юхов, Б. И. Землянов, В. А. Абчук, О. А. Мрыкин
ОСНОВЫ МАНЕВРИРОВАНИЯ КОРАБЛЕЙ.
М., Воениздат, 1966.

— по математическому планированию (к главе 4)

Л. В. Канторович, А. Б. Горстко
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ.
М., «Знание», 1968.

— по теории вероятностей (к главам 5, 6 и 7)

А. Н. Колмогоров
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И КОМБИНАТОРИКУ
(В сборнике «Новое в школьной математике».
М., «Знание», 1972).

Е. С. Вентцель
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.
М., Физматгиз, 1962.

А. М. Яглом, И. М. Яглом
ВЕРОЯТНОСТЬ И ИНФОРМАЦИЯ.
М., Физматгиз, 1960.

А. Китайгородский
НЕВЕРОЯТНО — НЕ ФАКТ.
М., «Молодая Гвардия», 1972.

Я. Хургин
НУ И ЧТО?
М., «Молодая Гвардия», 1970.

Л. Растригин
ЭТОТ СЛУЧАЙНЫЙ, СЛУЧАЙНЫЙ, СЛУЧАЙНЫЙ МИР.
М., «Молодая Гвардия», 1969.

Дж. Кемени, Дж. Снелла, Дж. Томпсон
ВВЕДЕНИЕ В КОНЕЧНУЮ МАТЕМАТИКУ.
М., «Иностранная литература», 1963.

Э. Борель
ВЕРОЯТНОСТЬ И ДОСТОВЕРНОСТЬ.
М., Физматгиз, 1961.

— по теории поиска (к главе 8)

Л. А. Емельянов, В. А. Абчук, В. П. Лапшин, В. Г. Суздаль
ТЕОРИЯ ПОИСКА В ВОЕННОМ ДЕЛЕ.
М., Воениздат, 1964.

— по теории игр и статистических решений (к главе 9)

Г. Чернов, Л. Мозес
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ.
М., «Советское радио», 1962.

Дж. Вильямс
СОВЕРШЕННЫЙ СТРАТЕГ.
М., «Советское радио», 1960.

СОДЕРЖАНИЕ

ДЛЯ СРЕДНЕГО И СТАРШЕГО ВОЗРАСТА

Абчук Владимир Авраамович

СЕКРЕТ ВЕЛИКИХ ПОЛКОВОДЦЕВ

Ответственный редактор
О. В. Москалева.

Художественный редактор
А. В. Карпов.

Технический редактор
Т. С. Тихомирова.

Корректоры
В. Г. Шишкина,
Л. Л. Бубнова.

Сдано в набор 28/III 1975 г. Подписано к печати 24/XI 1975 г. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага типографская № 1. Печ. л. 11. Усл. печ. л. 10,23. Уч.-изд. л. 8,67. Тираж 100 000 экз. М-22353. Заказ № 714. Цена 42 коп.

Ленинградское отделение ордена Трудового Красного Знамени издательства «Детская литература». Ленинград, 192187, наб. Кутузова, 6. Калининский полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР Росглавполиграфпрома Госкомиздата Совета Министров РСФСР. Калинин, проспект 50-летия Октября, 46.

Абчук В. А.

А17 Секрет великих полководцев. Очерки. Предисловие С. Сахарнова. Рис. В. Гусева. Л., «Дет. лит.», 1975.

174 с. с ил.

Занимательные рассказы о науке, которую называют «Исследованием операций». Наука эта помогает принимать верные решения в самых сложных обстоятельствах.

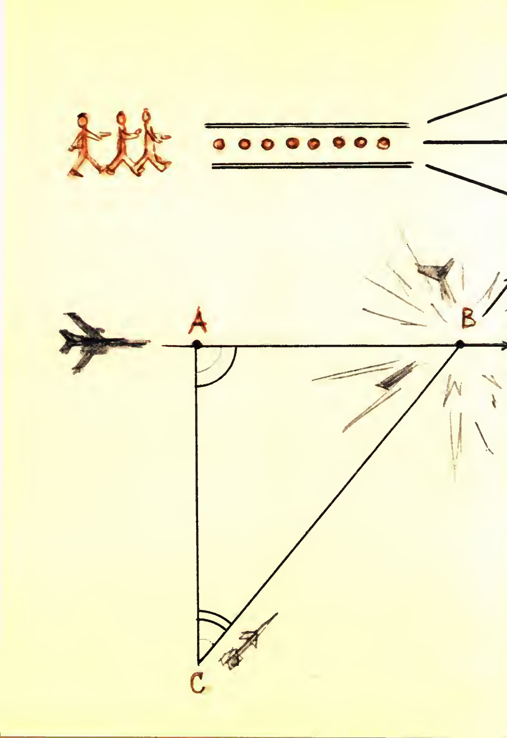
Как разгадать тайну шифра?

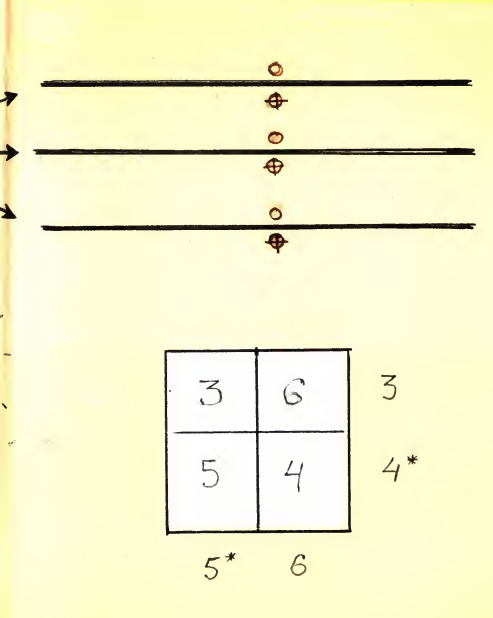
Как правильно составить пятилетний план?

Как стать Великим Полководцем?

На эти и многие другие вопросы поможет найти ответ эта книга.

51


A
B
C


3
6
3
5
4
4*
5*
6

42 коп.



1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1